Εξέταση Μαθηματικής Ανάλυσης
05-09-2022
Διάρκεια Εξέτασης 2 ώρες και 45 λεπτά

ΘΕΜΑ 1ο:

Έστω A, B κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και $x \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι:

(α) Η κλειστή θήκη του A είναι κυρτό σύνολο.

(β) Αν

$$x + A = \{x + a : a \in A\}, B + A = \{b + a : b \in B, a \in A\}$$

δείξτε ότι τα σύνολα $x + A, B + A$ είναι κυρτα.

ΘΕΜΑ 2ο:

Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, ακολουθία συναρτήσεων ώστε η σειρά $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ να συγκλίνει ομοιόμορφα.

(α) Δείξτε ότι αν

$$\|f_n\|_\infty = \sup\{|f_n(x)| : x \in \mathbb{R}\}$$

τότε $\lim_n \|f_n\|_\infty = 0$.

(β) Αν f_n συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$ για ολα τα $n \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι η f είναι επίσης συνεχής στο x_0.

ΘΕΜΑ 3ο: (α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος, A, B συμπαγή υποσύνολα του X και

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Δείξτε ότι υπάρχουν $a \in A, b \in B$ ώστε $d(a, b) = d(A, B)$. Ισχύει το ίδιο αν υποθέσουμε ότι τα A, B είναι κλειστά;

(β) Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής. Είναι αλήθεια ότι αν το X ειναι ολικά φραγμένο σύνολο τότε το $f(X)$ είναι επίσης ολικά φραγμένο;

ΘΕΜΑ 4ο:

(α) Να εξεταστεί ως προς την κατα σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \frac{\cos(nx^2)}{nx}, x \in (0, 1], n \in \mathbb{N}.$$

(β) Να εξεταστεί ως προς την κατα σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση η ακλουθία συναρτήσεων $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)$ όπου $g_k(x) = \frac{\sin(kx^2)}{k^2 x}, x \in (1, 2)$.

ΘΕΜΑ 5ο:

(α) Να εξεταστεί ως προς την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση η σειρά συναρτήσεων $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x^n}{n!} + \frac{1}{n^2}),\ \ x \in \mathbb{R}$.

(β) Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ και να υπολογιστεί το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Καλή επιτυχία