

Εξέταση Μαθηματικής Ανάλυσης

20-09-2021

ΘΕΜΑ 1ο:

(α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ αριθμήσιμο σύνολο. Δείξτε με χρήση μόνο του ορισμού ότι το A δεν είναι συνεκτικό σύνολο.

(β) Έστω $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x \geq 0\}$. Δείξτε ότι το σύνολο Ω είναι τόπος.

ΘΕΜΑ 2ο:

(α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $(x_n), (y_n)$ ακολουθίες στο X ώστε $x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow y$. Δείξτε ότι το $K = \{x_n, y_n, x, y : n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X .

(β) Έστω k το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου (Α.Μ.) σας και

$$A = \{k + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Βρείτε ανοικτό κάλυμμα του A χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα.

ΘΕΜΑ 3ο:

(α) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό και φραγμένο σύνολο και $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτησης. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in K$ ώστε $\text{diam}(f(K)) = |f(x) - f(y)|$.

(β) Έστω $f_n(x) = x^2 - \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2}$ όταν $0 \leq x \leq \frac{1}{2n}$ και $f_n(x) = 0$ παντού αλλού στο \mathbb{R} . Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4ο: Έστω k το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου (Α.Μ.) σας.

(α) Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} n(2x + k)^n$.

(β) Να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά σε κατάλληλο διάστημα η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - \alpha}, \quad \alpha = \max\{1, k\}.$$

ΘΕΜΑ 5ο:

(α) Έστω η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x}$. Να εξεταστεί ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση στα διαστήματα (i) $A = (\frac{1}{2}, +\infty)$, (ii) $B = (0, +\infty)$.

(β) Έστω $Y = \{f \in C([0, 1]) : \int_0^1 f(t)dt \leq 1\}$. Δείξτε ότι ο Y είναι κλειστό υποσύνολο του χώρου $C([0, 1])$ των συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ ως προς την νόρμα $\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(t)| : 0 \leq t \leq 1\}$.

Καλή επιτυχία