Εξέταση Μαθηματικής Ανάλυσης

02-02-2021

Σε ότι ακολουθεί $\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των ρητών και $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων.

ΘΕΜΑ 1ο: (α) Έστω $\|\cdot\|$ νόρμα στον $\mathbb{R}^2$ και

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \leq 1\}.$$

Δείξτε ότι το A είναι κυρτό σύνολο και ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : A \to \mathbb{Z}$ είναι σταθερή.

(β) Έστω $B = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ και $f : B \to \mathbb{Z}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

ΘΕΜΑ 2ο: (α) Έστω $A = (0,1]$. Βρείτε ανοικτό κάλυμμα του A χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα.

(β) Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και θεωρούμε το $\mathbb{Q}$ εφοδιασμένο με την συνήθη μετρική. Είναι αλήθεια ότι το $K \cap \mathbb{Q}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{Q}$?

ΘΕΜΑ 3ο: (α) Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $X = f^{-1}((0,1))$. Δείξτε ότι υπάρχουν $0 < a < b < 1$ ώστε $a \leq f(x) \leq b$ για κάθε $x \in X$.

(β) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\int_a^b f(t)t^n dt = 0, \forall n = 0,1,2,...$ Δείξτε ότι η f είναι ταυτοτικά μηδέν.

ΘΕΜΑ 4ο:

(α) Να εξεταστούν ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση οι ακολουθίες συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \\ log(nx), & 0 < x \leq \frac{1}{n} \end{cases} \quad g_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \\ 0, & x \notin (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \end{cases}$$

(β) Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}$. Να υπολογιστεί η συνάρτηση $f(x)$.

ΘΕΜΑ 5ο:

(α) Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n^2x)}{n^2x}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$ με $a > 0$ όχι όμως στο $(0, +\infty)$.

(β) Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της σειράς συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{x+1}{x})^n$.

Καλή επιτυχία