Εξέταση Μαθηματικής Ανάλυσης

31-08-2020

ΘΕΜΑ 1ο: (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι το σύνολο

$$B = \{(x, f(x)) : \ x \ \in \ \mathbb{R}\}$$

είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^2$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Άν το σύνολο

$$B = \{(x, f(x)) : \ x \ \in \ \mathbb{R}\}$$

είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^2$, είναι αλήθεια ότι η f είναι συνεχής;

ΘΕΜΑ 2ο: Έστω (X, d) μετρικός χώρος και A, B μη κενά υποσύνολα του X, δείξτε ότι:

(α)

$$(A \setminus B)^0 \subseteq A^0 \setminus B^0$$

(β)

$$\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}.$$

ΘΕΜΑ 3ο:

(α) Έστω A, B μη κενα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι στον $\mathbb{R}^2$ ισχύει

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}.$$

(β) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $x \in X$. Αν το x σημείο συσσώρευσης του X δείξτε ότι

$$\overline{X \setminus \{x\}} = X.$$

ΘΕΜΑ 4ο:

Έστω $f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx}}, \ \ n \ \in \ \mathbb{N}$, ακολουθία συναρτήσεων. Να εξεταστεί ως προς την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση στα σύνολα:

(α)

$$A = [0, +\infty),$$

(β)

$$B = [a, b], \ \ 0 < a < b.$$

ΘΕΜΑ 5ο:

(α) Έστω η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{1+n^3x^2}, \ \ x \ in \ [0, +\infty)$. Να εξεταστεί ως προς την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση.

(β) Έστω η ακολουθία συναρτήσεων $g_n(x) = \log(x + \frac{1}{n}), \ \ 0 < x < 1, \ n \ \in \ \mathbb{N}$. Να εξεταστεί ως προς την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση.

Καλή επιτυχία