Εξέταση Μαθηματικής Ανάλυσης

09-07-2020

ΘΕΜΑ 1ο: (α) Έστω μετρικός χώρος (X, d) και x, y, z διαφορετικά στοιχεία X. Δείξτε με βάση τον ορισμό ότι το σύνολο $X \setminus \{x, y, z\}$ είναι ανοικτό.

(β) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το σύνολο

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|f((x, y))\|_2 > 1\}$$

είναι ανοικτό. Εδώ $\| \cdot \|_2$ είναι η ευκλείδεια νόρμα.

ΘΕΜΑ 2ο: (α) Δείξτε ότι τα μόνα σύνολα που είναι ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά στον $\mathbb{R}$ είναι το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}$.

(β)Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι αν η ακολουθία (x_n) είναι βασική στον X τοτε η ακολουθία $d(x_n, x_{n+1})$ συγκλίνει στο 0. Ισχύει το αντίστροφο; Αιτιολογείστε την απάντηση σας.

ΘΕΜΑ 3ο: (α) Να εξεταστεί ως προς την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \cos(\frac{x}{n}), x \in \mathbb{R}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

(β) Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{nx}}$ συγκλίνει για $x > 0$ και ομοιόμορφα στο διάστημα $[\theta, +\infty)$ για κάθε $\theta > 0$.

ΘΕΜΑ 4ο:

(α) Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος, και $(K_n)_n$ φθίνουσα ακολουθία από κλειστά σύνολα στον X ώστε $diam(K_n) \to 0$. Δείξτε ότι $\cap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$.

(β)Έστω $E = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ και $f : E \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το σύνολο $f(E)$ είναι φραγμένο.

Καλή επιτυχία