Εξέταση Μαθηματικής Ανάλυσης

28-01-2020

ΘΕΜΑ 1ο: (α) Στον $\mathbb{R}^2$ με την Ευκλείδεια νόρμα ($\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$) θεωρούμε τα σύνολα $A = \{(x,y) : y > 0\}$, $\quad B = \{(x,y) : \|(x,y)\| > \epsilon\}$ όπου $\epsilon > 0$. (ι) Έστω $(x_0, y_0) \in A$ να προσδιοριστεί $r > 0$ ώστε η μπάλα $B((x_0,y_0), r) \subseteq A$. Έστω $(x_0, y_0) \in B$ να προσδιοριστεί $r > 0$ ώστε η μπάλα $B((x_0,y_0), r) \subseteq B$. Είναι τα A, B ανοικτά σύνολα; (ιι) Έστω O η αρχή των αξόνων, δείξτε ότι το $O \in \overline{A}, O \notin \overline{B}$

(β) Έστω (X, d) μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ ανοικτό, $a \in A$ και $(x_n)_n$ ακολουθία στοιχείων του X που συγκλίνει στο a. Δείξτε ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in A, \forall n \geq n_0$.

ΘΕΜΑ 2ο: (α) Να εξετάσετε αν υπάρχει συνεχής μη σταθερή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}$, όπου $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών.

(β) Δείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι κλειστό σύνολο. Είναι αλήθεια ότι η αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο;

(γ) Να οριστεί η απόσταση $d(A, B)$ δύο συνόλων $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$ και να υπολογιστεί το $d(A, B)$ όταν $A = \mathbb{N}$ και $B = \{n^2 + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$.

ΘΕΜΑ 3ο: (α) Δίνεται η συνάρτηση $\tau o\xi\epsilon\phi(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$. Να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά σε περιοχή του 0 και να δειχθεί ότι $\frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{3})^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{6}$.

(β) Να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{\frac{x}{n}}, x \in [-1, 1]$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

ΘΕΜΑ 4ο:

(α) Δύο μετρικές d_1, d_2 στο X λέγονται ισοδύναμες αν κάθε d_1-ανοικτό σύνολο είναι και d_2-ανοικτό και αντίστροφα. Έστω d μετρική στο X ώστε κάθε συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ να είναι συνεχής. Δείξτε ότι η d είναι ισοδύναμη με την διακριτή μετρική.

(β) Να εξεταστεί ως προς την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \frac{sin(n^2 x)}{nx} + 2x, \;\; x > 0, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

ΘΕΜΑ 5ο:

(α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι αν $K \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές μη κενό σύνολο τότε το $f(K)$ είναι επίσης συμπαγές και ότι η συνάρτηση $f|_K$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Να εξεταστεί ως προς την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(nx)}{n^2}, x \geq 0.$$

Καλή επιτυχία