

Μαθηματική Ανάλυση
Β. Βλάχου και Γ. Ελευθεράκης

Θέμα 1ο:

- α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1\}$ είναι ανοιχτό και ότι δεν είναι συνεκτικό.
 β) Να δώσετε παράδειγμα συνόλου που είναι κλειστό και φραγμένο, αλλά όχι συμπαγές.

Θέμα 2ο:

Έστω $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ συνεχής. Αν το $K \subseteq X$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X , τότε το $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y .

Θέμα 3ο:

- Να εξετάσετε αν η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{1}{(x - \frac{1}{2})n + 1}$, $x \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \dots$ συγκλίνει
 α) κατά σημείο και β) ομοιόμορφα.

Θέμα 4ο: Δίνεται η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x^2}$.

- α) Να δείξετε ότι η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο αυτό.
 β) Να δείξετε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$, όπου $a > 0$.

Θέμα 5ο:

Να εξετάσετε την συνάρτηση $T : (C[0, 1], d_{max}) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $T(f) = \int_0^1 |f(x)| dx + f(0)$ ως προς την συνέχεια.

Όπου $d_{max}(f, g) = \|f - g\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ