ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2014 — Β.Βλάχου, Γ. Ελευθεράκης

ΘΕΜΑ 1ο: Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά, ποια είναι συμπαγή και ποια είναι συνεκτικά στους αντίστοιχους μετρικούς χώρους:
(i) $[0,+\infty)$, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, (ii) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $(\mathbb{R}, d_\delta)$ (iii) $\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$
(Υπενθυμίζουμε ότι $d_\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$.) (2.0)

ΘΕΜΑ 2ο: Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ είναι πυκνό υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}^2, d_{\epsilon\upsilon\kappa\lambda})$.
(Υπενθυμίζουμε ότι $d_{\epsilon\upsilon\kappa\lambda}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$.) (1.5)

ΘΕΜΑ 3ο: Έστω $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, $A \subset \mathbb{R}$ μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. (1.5)

ΘΕΜΑ 4ο: Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος και A, B δύο μη κενά υποσύνολα του X. Να αποδείξετε ότι αν το A είναι συμπαγές τότε

$$d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \cap \overline{B} \neq \emptyset.$$

(Υπενθύμιση: $d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$.) (1.5)

ΘΕΜΑ 5ο: Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \begin{cases} nx, 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 1, \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν συγκλίνει α) κατά σημείο και β) ομοιόμορφα. (2.0)

ΘΕΜΑ 6ο: Να βρείτε το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς, (μην ξεχάσετε να εξετάσετε την σύγκλιση στα άκρα)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{na^n},\ a > 0$$

και να υπολογίστε το $f(\frac{a}{2})$. (1.5)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ