10–02–2017

Μαθηματική Ανάλυση

Β. Βλάχου και Γ. Ελευθεράκης

Θέμα 1ο:
α) Έστω $A \subset \mathbb{R}$ αριθμήσιμο σύνολο. Να αποδείξετε ότι $A^o = \emptyset$ στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
β) Να βρείτε το σύνορο του συνόλου $\sqrt{3}\mathbb{Q}$ στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Θέμα 2ο:
Έστω $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνεχής συνάρτηση και $x_0 \in X$. Δείξτε ότι αν $x_n \to x_0$, τότε $f(x_n) \to f(x_0)$.

Θέμα 3ο:
Να αποδείξετε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = x^2 + (-1)^n \frac{cos(n\sqrt{x})}{n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα και στην συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim_n \int_0^1 f_n(x)dx$.

Θέμα 4ο: Δίνεται η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(sin^2(nx))}{n^2}$. Να δείξετε ότι:
α) Η σειρά συγκλίνει κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.
β) Η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό υποδιάστημα των πραγματικών.
γ) Το όριο της σειράς είναι συνάρτηση συνεχής σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

Θέμα 5ο:
Έστω X συμπαγής χώρος και $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνεχής. Να αποδείξετε ότι $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ για κάθε $A \subset X$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ