

Εξέταση Μαθηματικής Ανάλυσης

11-02-2015

ΘΕΜΑ 1ο:

Δίνεται το σύνολο $A = \{(-1)^n \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. Να βρεθούν τα σύνολα A' , \bar{A} , A° ,

(α) Στον μετρικό χώρο (\mathbb{R}, d) , όπου d η συνήθης μετρική,

(β) Στον μετρικό χώρο (\mathbb{R}, δ) , όπου δ η διακριτή μετρική.

ΘΕΜΑ 2ο:

Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $Y \subseteq X$. Δείξτε ότι $\bar{Y} = X$ αν και μόνο αν το σύνολο $B(x, \epsilon) \cap Y$ είναι μη κενό για κάθε $x \in X$ και κάθε $\epsilon > 0$.

ΘΕΜΑ 3ο:

Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$.

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = d(x, A)$$

όπου

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

είναι συνεχής.

(β) Δείξτε ότι

$$\bar{A} = f^{-1}(\{0\}).$$

ΘΕΜΑ 4ο:

(α) Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$. (Μην ξεχάσετε να ελέγξετε τα άκρα).

(β) Αιτιολογήσετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}} \right) = 0.$$

ΘΕΜΑ 5ο:

Δίνεται η σειρά $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$.

(α) Δείξτε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

(β) Αιτιολογήσετε ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) dx$ και υπολογίστε το.

Καλή επιτυχία