02–07–2014

Μαθηματική Ανάλυση

Β. Βλάχου και Γ. Ελευθεράκης

Θέμα 1ο:
Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Να εξετάσετε αν αληθεύουν οι παρακάτω ισχυρισμοί :
α) Αν $A \subset X$ ανοιχτό και $B \subset X$ όχι ανοιχτό, τότε $A \cap B$ όχι ανοιχτό.
β) Αν $K, L \subset X$ είναι συμπαγή σύνολα, τότε και το $K \cup L$ είναι συμπαγές.

Θέμα 2ο:
Έστω $A \subset \mathbb{R}$ και $f_n : A \to \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \ldots$ μια ακολουθία συναρτήσεων. Έστω, επιπλέον, ότι

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in A, \quad |f_n(x)| \leq M_n.$$

Να αποδείξετε ότι αν $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A.

Θέμα 3ο:
Να εξετάσετε αν η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}, \quad x \in [0, 1], \ n = 1, 2, \ldots$ συγκλίνει α) κατά σημείο και β) ομοιόμορφα.

Θέμα 4ο:
Έστω $f : (\mathbb{R}^2, d_{\varepsilon\upsilon\kappa\lambda}) \to (\mathbb{R}^2, d_{\varepsilon\upsilon\kappa\lambda})$ με τύπο:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y), & x, y \in \mathbb{Q}, \\ (0, 0), & \text{αλλού} \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f είναι συνεχής μόνο στο σημείο $(0, 0)$.
Όπου $d_{\varepsilon\upsilon\kappa\lambda}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Θέμα 5ο:
Έστω $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνεχής συνάρτηση και $M \subset X$ πυκνό. Να αποδείξετε ότι το $f(M)$ είναι πυκνό στο $f(X)$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ