Εξέταση Μαθηματικής Ανάλυσης
08-09-2016
Β. Βλάχου και Γ. Ελευθεράκης

ΘΕΜΑ 1ο: Δείξτε ότι σε κάθε μετρικό χώρο:
(α) Η αυθαίρετη ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο. (Μον. 10)
(β) Η πεπερασμένη τομή ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο. (Μον. 10)

ΘΕΜΑ 2ο: Να βρεθεί σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ του οποίου το σύνολο των σημείων συσσώρευσης να είναι $A' = \{0, 2\}$ ενώ τα $0, 2$ να μην ανήκουν στο A. (Μον. 20)

ΘΕΜΑ 3ο:
Να εξεταστεί ως προς την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση η σειρά συναρτήσεων:

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}, \quad x \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

(Μον. 20)

ΘΕΜΑ 4ο:
Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι τα σύνολα

$$A = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}, \quad B = \{(x, y) : y \leq f(x)\}$$

είναι κλειστά στον $\mathbb{R}^2$ όταν αυτός είναι εφοδιασμένος με την ευκλείδεια μετρική ($d(x, y) = \|x - y\|_2, \;\; x, y \in \mathbb{R}^2$.)
(Μον. 20)

ΘΕΜΑ 5ο:
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2, \;\; x \in [-\pi, \pi]$. Θεωρείστε γνωστό πως οι συντελεστές Fourier της f είναι οι

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}, \quad a_n = 4\frac{(-1)^n}{n^2} \quad b_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(α) Να βρεθεί η σειρά Fourier της f.
(Μον. 10)
(β) Αξιοποιείστε τα προηγούμενα ώστε να δείξετε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(Μον. 10)

Καλή επιτυχία