20–09–2017

Μαθηματική Ανάλυση

Β. Βλάχου και Γ. Ελευθεράκης

Θέμα 1ο:
(i) Στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, να δείξετε ότι το 1 είναι συνοριακό σημείο του $\mathbb{N}$.
(ii) Στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, d_\delta)$, να δείξετε ότι το 1 είναι εσωτερικό σημείο του $[1, 2)$.
(iii) Στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}^2, d_{\epsilon\upsilon\kappa\lambda})$, να δείξετε ότι το $(0, 0)$ είναι σημείο συσσώρευσης της ανοιχτής περιοχής $B((1, 0), 1)$.
Θυμίζουμε ότι $d_{\epsilon\upsilon\kappa\lambda}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = ||(x_1 - x_2, y_1 - y_2)||_2$.
Αιτιολογίστε πλήρως τις απαντήσεις σας. (3.0)

Θέμα 2ο: Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος, $A \subset X$ ανοιχτό και $x_0 \in A$.
(i) Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon \in (0, \frac{1}{5})$ τέτοιο ώστε $B(x_0, \varepsilon) \subset A$.
(ii) Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon \in (0, \frac{1}{5})$ τέτοιο ώστε $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \subset A$. (2.0)

Θέμα 3ο: Έστω $f_n(x) = \frac{nx}{nx^2+1},\ x \in [0, 1]$ ακολουθία συναρτήσεων.
(i) Να εξετάσετε αν η $(f_n)_n$ συγκλίνει κατά σημείο.
(i) Να εξετάσετε αν η $(f_n)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$. (2.0)

Θέμα 4ο:
(i) Δείξτε ότι $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},\ x \in (-1, 1)$.
(ii) Αναπτύξτε την συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4}{2-x^2}$ σε δυναμοσειρά με κέντρο το μηδέν. (2.0)

Θέμα 5ο: Έστω (X, d) μετρικός χώρος, $\Omega \subset X$ ανοιχτό και $A \subset X$. Αν $\Omega \cap \overline{A} \neq \emptyset$, δείξτε ότι $\Omega \cap A \neq \emptyset$. (1.0)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ