

Μαθηματική Ανάλυση

B. Βλάχου και Γ. Ελευθεράκης

ΘΕΜΑ 1ο:

Δίνεται το σύνολο $A = (0, 1] \cup \{2\}$. Να βρεθούν η κλειστή θήκη, το εσωτερικό και το σύνορο του A , στους μετρικούς χώρους:

- (α) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$,
 (β) (\mathbb{R}, d_δ) , όπου d_δ η διακριτή μετρική.

ΘΕΜΑ 2ο:

(α) Να εξεταστεί ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση η ακολουθία συναρτήσεων:

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{nx+5} - 1 \right) \frac{1}{x+1}, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (β) Να δειχτεί ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^5 x)}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο \mathbb{R} .

ΘΕΜΑ 3ο:

Δείξτε ότι κάθε ακολουθία Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο (X, d) είναι φραγμένη.

ΘΕΜΑ 4ο:

(α) Έστω X μετρικός χώρος και συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ που είναι συνεχής και επί. Δείξτε ότι ο X είναι διαχωρίσιμος.

(β) Έστω \mathbb{Q} το σύνολο των ρητών. Δείξτε ότι ο μετρικός χώρος $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ εφοδιασμένος με την συνήθη μετρική είναι διαχωρίσιμος.

Καλή επιτυχία