Εξέταση Πραγματικής Ανάλυσης

07-02-2023

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 45 λεπτά

ΘΕΜΑ 1ο:

(1) Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι σειρές

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\log n} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin(\frac{1}{n^2}),\ \ \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n+2})^n\frac{1}{n^2},\ \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

(2) Έστω $\ell^\infty = \{(x_n) : \sup_n |x_n| < \infty\}$, $\ell^2 = \{(x_n) : \sum_{n=1}^\infty x_n^2 < \infty\}$, $\ell^1 = \{(x_n) : \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty\}$, $C_0 = \{(x_n) : x_n \to 0\}$.

Δείξτε ότι $\ell^1 \subseteq \ell^2 \subseteq C_0 \subseteq \ell^\infty$ και $\ell^1 \neq \ell^2 \neq C_0 \neq \ell^\infty$.

ΘΕΜΑ 2ο:

(1) Έστω $a_n(x) = 1$ για $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ και $a_n(x) = 0$ για $x \in (\frac{1}{n}, 1]$. Να βρεθούν τα όρια $\lim_n a_n(x)$ για τις διάφορες τιμές του $x \in [0,1]$.

(2) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $0 < \theta < 1$ ώστε

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \theta |a_n - a_{n-1}|,\ \ \forall n.$$

Δείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει.

ΘΕΜΑ 3ο:

(1) Έστω $K = [0,1]$ και $f : K \to K$ συνεχής συνάρτηση, ακολουθία $(x_n) \subseteq K$ ώστε $\lim_n |f(x_n) - x_n| = 0$. Δείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο.

(2) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\lim_{x\to 0} f(\frac{1}{x}) = (0,0)$. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη.

ΘΕΜΑ 4ο:

(1) Έστω $A = \{a_1, ..., a_n\} \subseteq \mathbb{R}$. (ι) Να βρεθεί το σύνολο A'. (ιι) Να βρεθεί κλειστό και αριθμήσιμο σύνολο $B \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A \subseteq B'$.

(2) Να βρεθεί η διάμετρος της ανοικτής μπάλλας $A = B((0,0),1)$ στον $\mathbb{R}^2$, (ι) με την Ευκλείδια νόρμα και (ιι) με την διακριτή μετρική.

ΘΕΜΑ 5ο:

(1) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ με $0 \in A^0$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in R^n$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\delta x \in A$.

(2) Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ γραμμική απεικόνιση και $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ώστε $T(A)^0 \neq \emptyset$. Δείξτε ότι η T είναι 1-1.

Καλή επιτυχία