Εξέταση Μαθηματικής Ανάλυσης
03-02-2023
Διάρκεια Εξέτασης 2 ώρες και 45 λεπτά

ΘΕΜΑ 1ο:

(α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A=\{a,b,c\}$ υποσύνολο του X με a,b,c διαφορετικά μεταξύ τους. Δείξτε ότι το σύνολο A είναι μη συνεκτικό.

(β) Έστω $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=2x+2y\}$. Δείξτε ότι το σύνολο K είναι συμπαγές, συνεκτικό και όχι κυρτό.

ΘΕΜΑ 2ο:

(α) Έστω $(X,d)=(\mathbb{R},|\cdot|)$, $E\subseteq X$ και $\delta>0$. Δείξτε ότι (ι) το σύνολο $\{B(y,\delta) : y\in E\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του $\overline{E}$ και (ιι) Αν το E είναι φραγμένο υπάρχουν $y_1,...,y_n\in E$ ώστε $\overline{E}\subseteq\cup_{i=1}^{n}B(y_i,\delta)$.

(β) Αν ο (X,d) είναι συμπαγής μετρικός χώρος (x_n), ακολουθία στο X και $f : X\to X$ συνεχής συνάρτηση ώστε $d(x_n,f(x_n))\to 0$ δείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο.

ΘΕΜΑ 3ο: (α) Έστω $f:[0,1]\to(0,1)$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι $\inf f([0,1])>0$. Ισχύει το ιδιο όταν $f:(0,1)\to(0,1)$ συνεχής;

(β) Έστω $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Δείξτε ότι η f είναι επίσης συνεχής. Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση την ακολουθία $f_n(x)=\frac{x}{n|x-1|+1}, x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4ο:

(α) Να βρεθούν τα x για τα οποία συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x^2-x-1)^n$.

(β) Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1},\ \ g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^{\frac{n}{2}}}{n+1}.$$

ΘΕΜΑ 5ο:

(α) Έστω

$$f_n:[0,1]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{nx}{e^{nx^2}}.$$

Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ συγκλίνει κατά σημείο και όχι οιμοιόμορφα.

(β) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση Lipchitz. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}f(\frac{x}{n})$$

συγκλίνει ομοιόμορφα.

Καλή επιτυχία