# Εξέταση Πραγματικής Ανάλυσης

## 04-02-2022

**ΘΕΜΑ 1ο:**

(1) Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι σειρές

(α) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2^n})$, (β) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{n})^{-n}$ (γ) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n+1})^{\frac{1}{n}}$ (δ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{1+2^n}$

(2) Έστω $(a_n)$ πραγματική ακολουθία που συγκλίνει στο 0. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $(a_{k_n})$ ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ να συγκλίνει.

**ΘΕΜΑ 2ο:**

(1) Έστω $L$ ευθεία στον $\mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{R}^2 \setminus L$ είναι πυκνό στον $\mathbb{R}^2$.

(2) Έστω $\{L_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο σύνολο από ευθείες στον $\mathbb{R}^2$. Δείξτε οτι το εσωτερικό του συνόλου $\cup_n L_n$ είναι κενό στον $\mathbb{R}^2$.

**ΘΕΜΑ 3ο:**

(1) Έστω $A_n \subseteq \mathbb{R}^k, n \in \mathbb{N}$ ώστε $diam(A_n) \to 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $\cap_n A_n$ είναι κενό η μονοσύνολο.

(2) Έστω $A_n \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών και φραγμένων συνόλων ώστε $diam(A_n) \to 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $\cap_n A_n$ είναι μονοσύνολο.

**ΘΕΜΑ 4ο:**

(1) Έστω $(X, d)$ μετρικός χώρος και $A$ μη κενό υποσύνολο του $X$. Δείξτε ότι $diam(A) = diam(\overline{A})$.

(2) Έστω $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ εννοούμενος ως μετρικός χώρος εφοδιασμένος με την συνήθη μετρική. Να βρεθούν τα ανοικτά υποσύνολα του $X$.

**ΘΕΜΑ 5ο:**

(α) Έστω $X$ διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με δύο νόρμες $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. Αν υπάρχουν θετικοί αριθμοί $a, b$ ώστε

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1, \ \ \forall\, x \in X$$

δείξτε ότι ο $(X, \|\cdot\|_1)$ είναι πλήρης αν και μόνο αν ο $(X, \|\cdot\|_2)$ είναι πλήρης.

(β) Έστω $\|(x, y)\| = |x| + |y|, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^2$ ως προς την οποία ο $\mathbb{R}^2$ είναι πλήρης.

**Καλή επιτυχία**