Εξέταση Μαθηματικής Ανάλυσης

18-02-2021

ΘΕΜΑ 1ο: Έστω (X,d) μετρικός χώρος.

(α)Αν $(x_n)_n$ ακολουθία Cauchy στον X δείξτε ότι το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο.

(β) Δείξτε οτι τα (ι), (ιι) παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(ι) Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ έχει συμπαγή εικονα, (ιι) Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

ΘΕΜΑ 2ο: (α) Έστω A, B κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ με $A \cap B \neq \emptyset$. Εξετάστε αν το $A \cup B$ είναι κυρτό η συνεκτικό.

(β) Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $f, g : X \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις ώστε για κάθε x, y διαφορετικά μεταξύ τους η $f(x) \neq f(y)$ η $g(x) \neq g(y)$. Δείξτε ότι υπάρχει συμπαγές υποσύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^2$ και ομοιομορφισμός $\phi : X \to K$.

ΘΕΜΑ 3ο: (α) Να εξεταστεί ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{2n}{nx+3}, x \in (0, +\infty)$.

(β) Έστω $A_n = [-n, n], n \in \mathbb{N}$ και $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η ακολουθία συναρτήσεων που δίνεται από την σχέση

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_n \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus A_n \end{cases}$$

Να εξεταστεί η (f_n) ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση.

ΘΕΜΑ 4ο:

(α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση και $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$. Να εξεταστεί η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση.

(β) Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(x)^n}{n!}$. Να εξεταστεί η προηγούμενη σειρά συναρτήσεων ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[-\alpha, \alpha], \alpha > 0$.

ΘΕΜΑ 5ο:

(α) Να εξεταστεί ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + x^n}{1 + 3^n x^n}, x \in [1, +\infty)$.

(β) Δείξτε ότι $log(1 + x) \leq x$ για κάθε $x \geq 0$ και εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση την σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} log(1 + \frac{x^2}{n^2})$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$. (Εδώ θεωρείται ότι $logx = lnx$).

Καλή επιτυχία