Εξέταση Μαθηματικής Ανάλυσης

31-08-2020

ΘΕΜΑ 1ο: Έστω (X, d) μετρικός χώρος και A, B μη κενά υποσύνολα του X. Αποδείξτε η αλλιώς δώστε αντιπαράδειγμα στους παρακάτω ισχυρισμούς:

(α) Αν A, B κλειστά και ξένα σύνολα τότε $d(A, B) > 0$.

(β) Αν A κλειστό και B συμπαγές σύτνολο με $A \cap B = \emptyset$ τοτε $d(A, B) > 0$.

(Σημ. $d(A, B) > 0$ είναι η απόσταση του A από του B.)

ΘΕΜΑ 2ο: Έστω (X, d) μετρικός χώρος F και A μη κενά υποσύνολα του X.

(α) Δείξτε ότι F κλειστό αν και μόνο αν υπάρχει $g : X \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $F = g^{-1}(\{0\})$.

(β) Δείξτε ότι για καθε $x, y \in X$ ισχύει ότι

$$d(x, y) \leq d(x, A) + diam(A) + d(y, A).$$

(Σημ. $diam(A)$ είναι η διάμετρος του A.)

ΘΕΜΑ 3ο: (α) Δείξτε ότι για κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $(a_i, b_i), i \in I$ ώστε

$$A = \cup_{i \in I}(a_i, b_i).$$

(β) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε διάστημα (a, b) ισχύει ότι το $f^{-1}((a, b))$ είναι ανοικτό σύνολο.

ΘΕΜΑ 4ο: (α) Να εξεταστεί ως προς την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \frac{x^2}{n} e^{-\frac{x}{n}}, \;\; x \in (0, 1).$$

(β) Να εξεταστεί ως προς την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^3}, \;\; x \in (0, +\infty).$$

ΘΕΜΑ 5ο: (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη και συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε

$$F_n(x) = \int_0^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt.$$

Να εξεταστει η $(F_n)_n$ ως προς την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση.

(β) Να υπολογιστεί το άθροισμα $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Καλή επιτυχία