Εξέταση Μαθηματικής Ανάλυσης
09-07-2020

ΘΕΜΑ 1ο: (α) Έστω μετρικός χώρος (X,d) και A,B υποσύνολα του X. Είναι αλήθεια ότι
$$(A\cup B)^0 = A^0 \cup B^0 \ ?$$
Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$ και $(x_n)_n$ ακολουθία στον μετρικό χώρος (X,d) ώστε
$$d(x_m, x_n) > \varepsilon$$
για κάθε m,n. Είναι η $(x_n)_n$ συγκλίνουσα ;

ΘΕΜΑ 2ο: (α) Έστω $(X,d),(Y,\rho)$ μετρικοί χώροι και $f: X\to Y$. Δείξτε ότι η f απεικονίζει κλειστά σε κλειστά σύνολα αν και μόνο αν
$$\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A}).$$

(β)Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

(ι) Αν $(x_n)_n, (y_n)_n$ ακολουθίες στον X και $x_n\to x, y_n\to y$ δείξτε ότι
$$x_n + y_n \to x+y.$$

(ιι) Αν A,B υποσύνολα του X, δείξτε ότι
$$\overline{A}+\overline{B}\subseteq \overline{A+B}.$$

ΘΕΜΑ 3ο: (α) Να εξεταστεί ως προς την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση η ακολουθία συναρτήσεων
$$f_n(x) = (1-x^n)\frac{nx}{nx+1},\ \ x\in[0,1],\ \ n\in\mathbb{N}.$$

(β) Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ συγκλίνει κατά σημείο στον $\mathbb{R}$ και ομοιόμορφα στο διάστημα $[-\theta,\theta]$ για κάθε $\theta>0$.

ΘΕΜΑ 4ο:

(α) Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος, $f: X\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $A\subseteq X$. Δείξτε ότι
$$f(\overline{A}) = \overline{f(A)}.$$

(β)Έστω $E\subseteq\mathbb{R}$ και $f:\overline{E}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι αν ο περιορισμός της f στο E είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\overline{E}$.

Καλή επιτυχία