Εξέταση Μαθηματικής Ανάλυσης

23-09-2015

ΘΕΜΑ 1ο:

(α) Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $x_0 \in X, \epsilon > 0$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$A = \{x \in X : d(x, x_0) \leq \epsilon\}$$

είναι κλεστό. (Μον. 10)

(β) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $x_0 \in X, \epsilon > 0$.. Δείξτε ότι αν $B(x_0, \epsilon) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \epsilon\}$ τότε

$$\overline{B(x_0, \epsilon)} = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq \epsilon\}.$$

(Μον. 10)

ΘΕΜΑ 2ο:

(α) Έστω X μη κενό σύνολο και δ η διακριτή μετρική στο X. Δείξτε ότι αν (x_n) ειναι ακολουθία Cauchy στο X τότε η (x_n) είναι τελικά σταθερή. (Μον. 10)

(β) Έστω X, δ όπως στο προηγούμενο ερώτημα και $f : \mathbb{R} \to X$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή. (Το $\mathbb{R}$ εννοείται εφοδιασμένο με την συνήθη μετρική). (Μον. 10)

ΘΕΜΑ 3ο:

Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ ορίζουμε $\delta(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$.

(α) Δείξτε ότι $\delta(B) = \delta(\overline{B})$ για κάθε $B \subseteq \mathbb{R}$. (Μον. 10)

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι αν ο αριθμός $\delta(A)$ ειναι πεπερασμένος τότε και ο $\delta(f(A))$ είναι πεπερασμένος. (Μον. 10)

ΘΕΜΑ 4ο:

Να εξεταστούν ως προς την ομοιόμορφη και κατά σημείο σύγκλιση οι ακολουθίες

(α) $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, όπου $f_n(x) = 1$ αν $\frac{1}{n} < x \leq 1$ και $f_n(x) = nx$ αν $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$. (Μον. 10)

(β) $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, όπου $g_n(x) = \frac{nx+x^2}{n}$. (Μον. 10)

ΘΕΜΑ 5ο:

(α) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}, x \in [0, 1].$$

(Μον. 10)

(β) Να υπολογιστεί το όριο της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^n}$. (Μον. 10)

Καλή επιτυχία