Τμημα Μαθηματικων, Πανεπιστημιο Πατρων

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

- Εάν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $-L \le x < L$ και εκτός αυτού ορίζεται από τη σχέση $f(x) = f(x+2L)$ τότε η **σειρά Fourier** της f είναι

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{1}$$

όπου οι σταθερές a_n και b_n δίνονται από τις σχέσεις

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(s)\, ds \tag{2}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(s) \cos \frac{n\pi s}{L}\, ds, \qquad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(s) \sin \frac{n\pi s}{L}\, ds, \tag{3}$$

για $n = 1, 2, \ldots$. Θυμίζουμε ότι

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi s}{L}\, ds = \int_{-L}^{L} \sin \frac{n\pi s}{L}\, ds = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi s}{L} \cos \frac{n\pi s}{L}\, ds = \int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi s}{L} \sin \frac{n\pi s}{L}\, ds = \begin{cases} 0, & m \ne n \\ L, & m = n \end{cases} \tag{5}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi s}{L} \sin \frac{n\pi s}{L}\, ds = 0, \qquad m, n = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

- Εάν $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος Sturm–Liouville

$$\big(p(x)y'\big)' - q(x)y + \lambda \rho(x) y = 0, \qquad 0 < x < L \tag{7}$$

$$\alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0, \qquad \alpha_2 y(L) + \beta_2 y'(L) = 0 \tag{8}$$

με $p(x) > 0$ και $\rho(x) > 0$, για $0 < x < L$ τότε

$$\int_0^L \phi_n(t)\phi_m(t)\rho(t)\, dt = 0, \quad n \ne m, \tag{9}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \qquad c_n = \frac{\int_0^L f(t)\phi_n(t)\rho(t)\, dt}{\int_0^L \phi_n^2(t)\rho(t)\, dt}. \tag{10}$$

- Οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος

$$\phi'' + \lambda\phi = 0, \qquad 0 < x < L \tag{11}$$

  1. με συνοριακές συνθήκες

$$\phi(0) = \phi(L) = 0 \tag{12}$$

  είναι αντίστοιχα

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad \phi_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

  2. με συνοριακές συνθήκες

$$\phi'(0) = \phi'(L) = 0 \tag{14}$$

  είναι αντίστοιχα

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad \phi_n(x) = A_n \cos \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

3. με περιοδικές συνοριακές συνθήκες

$$\phi(0) = \phi(L), \quad \phi'(0) = \phi'(L) \tag{16}$$

είναι αντίστοιχα

$$\lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2, \qquad \phi_n(x) = A_n \cos\frac{2n\pi x}{L} + B_n \sin\frac{2n\pi x}{L}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

- Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για την **εξίσωση του κύματος**

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \tag{18}$$

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{19}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{20}$$

όπου $c > 0$ είναι μία σταθερά, δίνεται από τη σχέση

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)\, d\xi. \tag{21}$$

- Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για την **εξίσωση της θερμότητας**

$$u_t = k u_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \tag{22}$$

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{23}$$

όπου $k > 0$ είναι μία σταθερά, δίνεται από τη σχέση

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/4kt}\phi(\xi)\, d\xi. \tag{24}$$

- Η **εξίσωση του Laplace** $\Delta u = 0$ σε πολικές συντεταγμένες γράφεται

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0. \tag{25}$$

Αν $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, τότε

$$\Theta'' + n^2\Theta = 0, \qquad \Theta \ 2\pi\text{-περιοδική}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{26}$$

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{27}$$

με αντίστοιχες λύσεις

$$\Theta_0(\theta) = A_0, \qquad \Theta_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

$$R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r, \qquad R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{29}$$

Ο **τύπος του Poisson**

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - r^2) g(\varphi)}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \varphi) + r^2}\, d\varphi, \qquad r < a, \tag{30}$$

είναι η λύση του προβλήματος της εξίσωσης του Laplace $\Delta u = 0$ στο δίσκο $D(0,a)$ με τιμές $u(a,\theta) = g(\theta)$ στο σύνορο του δίσκου.