Πανεπιστημιο Πατρων – Τμημα Μαθηματικων

AM436 ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ασκήσεις & **Λύσεις** 2η σειρά

ΜΔΕ 1ης τάξης

1. Να λυθεί το μη γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u_t + u u_x = 0, && x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x) = x^2, && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

για όλους τους χρόνους $t \geq 0$.

Λύση

Εκφράζοντας τις χαρακτηριστικές καμπύλες στη μορφή $(x(t), t)$, έχουμε το χαρακτηριστικό σύστημα

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0,$$

με αρχικά δεδομένα για $t = 0$

$$x(0) = \xi, \qquad u(0) = \phi(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Οι χαρακτηριστικές είναι ευθείες και η u είναι σταθερή πάνω σε αυτές, κατά συνέπεια

$$u(x,t) = u(\xi, 0) = \phi(\xi) = \xi^2, \tag{1}$$

οπότε λύνοντας την x-εξίσωση βρίσκουμε

$$x = \phi(\xi)\,t + \xi = \xi^2 t + \xi \Rightarrow \xi = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4tx}}{2t}. \tag{2}$$

Έτσι δια μέσου της (1) έχουμε

$$u(x,t) = \xi^2 = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1+4tx}}{2t}\right)^2 = \frac{1 + 2tx \mp \sqrt{1+4tx}}{2t^2}.$$

Η u ορίζεται για $t \neq 0$ και επειδή λύνει το πρόβλημα αρχικών τιμών θα πρέπει

$$u(x,0) = x^2 = \lim_{t\to 0} \frac{1 + 2tx \mp \sqrt{1+4tx}}{2t^2}.$$

Έτσι η $(1 + 2tx + \sqrt{1+4tx})/(2t^2)$ απορρίπτεται μιας και αποκλίνει στο ∞ καθώς $t \to 0$, ενώ

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 + 2tx - \sqrt{1+4tx}}{2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2x}{4t}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+4tx}}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{4x^2}{4(1+4tx)^{3/2}} = x^2.$$

Επομένως η

$$u(x,t) = \begin{cases} x, & t = 0 \\ \dfrac{1 + 2tx - \sqrt{1+4tx}}{2t^2}, & t > 0 \end{cases}$$

είναι μοναδική συνεχής λύση του προβλήματος αρχικών τιμών και ορίζεται στην περιοχή $1 + 4xt \geq 0$, $t \geq 0$.

2. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$
\begin{aligned}
&u_t + u u_x = 0, \qquad && x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\
&u(x,0) = \phi(x), \qquad && x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

όπου

$$
\phi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}.
$$

(α΄) Να σχεδιαστεί το διάγραμα των χαρακτηριστικών.

(β΄) Να βρεθεί ο χρόνος θραύσης του κύματος.

(γ΄) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος για όλα τα $t \ge 0$.

Λύση

Βλέπε Διάλεξη 7.

3. Θεωρούμε την εξίσωση

$$
u_t + a(u) u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.
$$

Εάν η f είναι μία ομαλή συνάρτηση δείξτε ότι για να είναι η $u = f(x/t)$ μία μη σταθερή λύση της εξίσωσης θα πρέπει η f να είναι η αντίστροφη της a.

Λύση

Βλέπε Διάλεξη 7.

4. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$
\begin{aligned}
&u_t + e^u u_x = 0, \qquad && x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\
&u(x,0) = \phi(x), \qquad && x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

όπου

$$
\phi(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}
$$

σε ολόκληρο το θετικό ημιεπίπεδο $x \in \mathbb{R}$, $t \ge 0$.

Λύση

Βλέπε Διάλεξη 7.

5. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$
\begin{aligned}
&u_x + u_y = 1, \qquad && x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \\
&u(x,x) = x, \qquad && x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

(α΄) Δείξτε ότι το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις.

(β΄) Σε ποιό, κατά τη γνώμη σας, λόγο οφείλεται το ότι η λύση δεν είναι μοναδική;

Λύση

Εκφράζοντας τις χαρακτηριστικές καμπύλες στη μορφή $(x, y(x))$, έχουμε το χαρακτηριστικό σύστημα

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1,$$

με αρχικά δεδομένα

$$x = y, \qquad u = x.$$

(α΄) Λύνοντας βρίσκουμε, αρχικά,

$$y = x + \xi, \qquad u = x + \lambda\xi, \qquad \xi \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

κατά συνέπεια

$$u(x, y) = x + \lambda(y - x), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Πράγματι, από την (4), βλέπουμε ότι

$$u(x, x) = x, \qquad u_x = 1 - \lambda, \qquad u_y = \lambda,$$

δηλαδή η $u(x, y) = u_\lambda(x, y)$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για κάθε τιμή της παραμέτρου λ. Έτσι το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις.

Αν τώρα f είναι μία διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(0) = 0$ τότε η (3) γενικεύεται στην

$$y = x + \xi, \qquad u = x + f(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

κατά συνέπεια η (4) γίνεται

$$u(x, y) = x + f(y - x). \tag{5}$$

Από την (5), έπεται ότι

$$u(x, x) = x, \qquad u_x + u_y = 1 - f'(y - x) + f'(y - x) = 1,$$

δηλαδή για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση f με $f(0) = 0$, η (5) είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

(β΄) Οι χαρακτηριστικές καμπύλες της εξίσωσης είναι οι $y = x + \xi$, με $\xi \in \mathbb{R}$, και η αρχική καμπύλη είναι η $y = x$ η οποία είναι χαρακτηριστική. Έτσι, σε αντίθεση με τα άλλα προβλήματα αρχικών τιμών που λύσαμε στα οποία δεν συνέβαινε το ανάλογο γεγονός, εδώ έχουμε απειρία λύσεων.

6. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u_x + u_y = 1, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \\ &u(x, x) = 1, \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(α΄) Δείξτε ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση.

(β΄) Σε ποιό, κατά τη γνώμη σας, λόγο οφείλεται το γεγονός μη ύπαρξης λύσης;

Λύση

(αʹ) Εκφράζοντας τις χαρακτηριστικές καμπύλες σε παραμετρική μορφή $(x(s), y(s))$, έχουμε το χαρακτηριστικό σύστημα

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 1,$$

με αρχικά δεδομένα για $s = 0$

$$x = y, \qquad u = 1.$$

Λύνοντας βρίσκουμε

$$x = s + \xi, \qquad y = s + \xi, \qquad u = s + 1, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Από την (6), έξουμε $\lambda x = \lambda s + \lambda \xi$ και $(1-\lambda)y = (1-\lambda)s + (1-\lambda)\xi$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, οπότε υπολογίζουμε

$$s = \lambda x + (1-\lambda)y - \xi \Rightarrow u(x, y) = 1 + \lambda x + (1-\lambda)y - \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Ενώ η u ικανοποιεί την εξίσωση, μιας και

$$u_x + u_y = \lambda + (1-\lambda) = 1,$$

η αρχική συνθήκη $u(x, x) = 1$ δεν ικανοποιείται για καμία τιμή της σταθεράς ξ

$$u(x, x) = x - \xi.$$

Έτσι το πρόβλημα δεν έχει λύση.

(βʹ) Οι χαρακτηριστικές καμπύλες της εξίσωσης είναι οι $y = x + \xi$, με $\xi \in \mathbb{R}$, και η αρχική καμπύλη είναι η $y = x$ η οποία είναι χαρακτηριστική. Έτσι, σε αντίθεση με τα άλλα προβλήματα αρχικών τιμών που λύσαμε στα οποία δεν συνέβαινε το ανάλογο γεγονός, εδώ δεν έχουμε λύση.

Σε σχέση με το ερώτημα (βʹ) των προβλημάτων 5 και 6 παραπέμπουμε στο βιβλίο "Partial Differential Equations in Action, From Modelling to Theory", S. Salsa εκδόσεις Springer σελ. 192-199, στο οποίο γίνεται μία πλήρης συζήτηση και παρουσιάζεται ένα Θεώρημα σχετικά με ύπαρξη ή μη και μοναδικότητα ή μη λύσης μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης της μορφής

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y + c(x, y, u) = 0.$$

Οπωσδήποτε δεν είναι απαραίτητο να το γνωρίζετε για το τελικό διαγώνισμα.