Πανεπιστημιο Πατρων – Τμημα Μαθηματικων

ΑΜ436 ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ασκήσεις 2η σειρά

ΜΔΕ 1ης τάξης

1. Να λυθεί το μη γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u_t + u u_x = 0, && x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x) = x^2, && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   για όλους τους χρόνους $t \geq 0$.

2. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u_t + u u_x = 0, && x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   όπου

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}.$$

   (α΄) Να σχεδιαστεί το διάγραμα των χαρακτηριστικών.

   (β΄) Να βρεθεί ο χρόνος θραύσης του κύματος.

   (γ΄) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος για όλα τα $t \geq 0$.

3. Θεωρούμε την εξίσωση

$$u_t + a(u) u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

   Εάν η f είναι μία ομαλή συνάρτηση δείξτε ότι για να είναι η $u = f(x/t)$ μία μη σταθερή λύση της εξίσωσης θα πρέπει η f να είναι η αντίστροφη της a.

4. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u_t + e^u u_x = 0, && x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   όπου

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$$

   σε ολόκληρο το θετικό ημιεπίπεδο $x \in \mathbb{R},\ t \geq 0$.

5. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u_x + u_y = 1, && x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \\ &u(x,x) = x, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   (α΄) Δείξτε ότι το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις.

(β′) Σε ποιό, κατά τη γνώμη σας, λόγο οφείλεται το ότι η λύση δεν είναι μοναδική;

6. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u_x + u_y = 1, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \\ &u(x,x) = 1, \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(α′) Δείξτε ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση.

(β′) Σε ποιό, κατά τη γνώμη σας, λόγο οφείλεται το γεγονός μη ύπαρξης λύσης;