Πανεπιστημιο Πατρων – Τμημα Μαθηματικων

ΑΜ436 ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ασκήσεις & **Λύσεις** 1η σειρά

ΜΔΕ 1ης τάξης

1. Να λυθεί η εξίσωση

$$au_t(x,t) + bu_x(x,t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

όπου a και b είναι πραγματικές σταθερές με $a^2 + b^2 \neq 0$.

Λύση

3ος τρόπος επίλυσης: Η μέθοδος των συντεταγμένων. Ορίζουμε τις συντεταγμένες ξ και η με τις σχέσεις

$$\xi = bx + at, \qquad \eta = ax - bt$$

και ορίζουμε $U(\xi,\eta) = u(x,t)$. Έτσι από τον κανόνα της αλυσίδας υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} u_t &= U_\xi \xi_t + U_\eta \eta_t = aU_\xi - bU_\eta \\ u_x &= U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = bU_\xi + aU_\eta. \end{aligned}$$

Από την αρχική εξίσωση παίρνουμε

$$\begin{aligned} 0 &= au_t + bu_x \\ &= a^2U_\xi - abU_\eta + b^2U_\xi + abU_\eta \\ &= (a^2 + b^2)U_\xi. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια έχουμε ότι $U(\xi,\eta) = \phi(\eta)$ όπου ϕ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση, η ισοδύναμα από τον ορισμό των ξ, η και U ότι

$$u(x,t) = \phi(ax - bt).$$

(α') Να λυθεί η εξίσωση με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών.

(β') Δείξτε ότι το $\xi\eta$ σύστημα συντεταγμένων είναι ορθογώνιο.

2. Να λυθεί η εξίσωση

$$au_t + bu_x + cu = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

όπου a, b, c είναι σταθερές με $a^2 + b^2 \neq 0$.

Λύση

Αν όπως στην Άσκηση 1 ορίσουμε τις συντεταγμένες $\xi = bx + at$ και $\eta = ax - bt$ και θέσουμε $U(\xi,\eta) = u(x,t)$ η αρχική εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned} 0 &= au_t + bu_x + cu \\ &= a^2U_\xi - abU_\eta + b^2U_\xi + abU_\eta + cU \\ &= (a^2 + b^2)U_\xi + cU, \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$U_\xi + \frac{c}{a^2+b^2}U = 0.$$

Κατά συνέπεια έχουμε ότι

$$U(\xi,\eta) = \phi(\eta)e^{-\frac{c}{a^2+b^2}\xi}$$

όπου ϕ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση. Επιστρέφοντας στις αρχικές συντεταγμένες παίρνουμε

$$u(x,t) = \phi(ax-bt)e^{-\frac{c}{a^2+b^2}(bx+at)},$$

όπου ϕ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση.

3. Να λυθούν οι εξισώσεις

(α΄) $(1+x^2)u_x + u_y = 0.$ (β΄) $u_x + yu_y = 0.$ (γ΄) $u_x + 2xy^2u_y = 0.$

Λύση

(α΄) Γράφοντας την εξίσωση στη μορφή

$$u_x + \frac{1}{1+x^2}u_y = 0,$$

και εκφράζοντας τις χαρακτηριστικές καμπύλες σαν $(x, y(x))$, έχουμε το χαρακτηριστικό σύστημα

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Έτσι προκύπτει ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι οι

$$y = \arctan x + \xi, \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

οι οποίες καλύπτουν ολόκληρο το επίπεδο, και πάνω σ' αυτές η u παραμένει σταθερή. Κατά συνέπεια αν $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει μοναδικό $\xi_0 = y_0 - \arctan x_0$ ώστε $y_0 = \arctan x_0 + \xi_0$ και τα σημεία (x_0, y_0) και $(0, \xi_0)$ βρίσκονται πάνω στη ίδια χαρακτηριστική. Επομένως

$$u(x_0,y_0) = u(0,\xi_0) = f(\xi_0) = f(y_0 - \arctan x_0),$$

όπου η f είναι μία αυθαίρετη παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έτσι η λύση της εξίσωσης είναι

$$u(x,t) = f(y - \arctan x),$$

όπου η f είναι μία αυθαίρετη παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(β΄) Το χαρακτηριστικό σύστημα είναι

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Έτσι προκύπτει ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι οι

$$y = \xi e^x, \qquad \xi \in \mathbb{R} \qquad (\Rightarrow \xi = ye^{-x})$$

οι οποίες καλύπτουν ολόκληρο το επίπεδο, και πάνω σ' αυτές η u παραμένει σταθερή. Βρίσκουμε επίσης ότι πάνω στις χαρακτηριστικές

$$u(x,y) = u(x,\xi e^x) \overset{x=0}{=} u(0,\xi) = f(\xi),$$

όπου η f είναι μία αυθαίρετη παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έτσι η λύση της εξίσωσης είναι

$$u(x,t) = f(ye^{-x}),$$

όπου η f είναι μία αυθαίρετη παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(γ') Το χαρακτηριστικό σύστημα είναι

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy^2, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Λύνοντας την εξίσωση των χαρακτηριστικών βρίσκουμε

$$\frac{y'}{y^2} = 2x \Rightarrow -\frac{1}{y} = x^2 - \xi \Rightarrow y = \frac{1}{\xi - x^2}, \qquad \xi \in \mathbb{R} \qquad \left(\Rightarrow \xi = x^2 + \frac{1}{y}\right).$$

Πάνω στις χαρακτηριστικές η u παραμένει σταθερή οπότε υπολογίζουμε

$$u(x,y) = u\left(x, \frac{1}{\xi - x^2}\right) \overset{x=0}{=} u\left(0, \frac{1}{\xi}\right) = f(\xi),$$

όπου η f είναι μία αυθαίρετη παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έτσι η λύση της εξίσωσης είναι

$$u(x,t) = f\left(x^2 + \frac{1}{y}\right),$$

όπου η f είναι μία αυθαίρετη παραγωγίσιμη συνάρτηση.

4. Να λυθεί η εξίσωση

$$3u_x + u_{yx} = 0.$$

Λύση

Θέτοντας $v = u_x$ η εξίσωση γράφεται

$$v_y + 3v = 0$$

η οποία είναι μία γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, οπότε

$$v = u_x = f(x)e^{-3y},$$

όπου $f(x)$ είναι μια αυθαίρετη συνεχής συνάρτηση, η σταθερά της ολοκλήρωσης ως προς y. Ολοκληρώνοντας τώρα ως προς x βρίσκουμε

$$u(x,y) = \int f(x)e^{-3y}\,\mathrm{d}x = e^{-3y}\int f(x)\,\mathrm{d}x = (F(x) + g(y))e^{-3y},$$

όπου F και g είναι αυθαίρετες παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

5. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u_t - xtu_x = u, && x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = u_0(x), && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Λύση

Εκφράζοντας τις χαρακτηριστικές καμπύλες στη μορφή $(x(t), t)$, έχουμε το χαρακτηριστικό σύστημα

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -xt, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u,$$

με αρχικά δεδομένα για $t = 0$

$$x(0) = \xi, \qquad u(0) = u_0(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Λύνοντας (βλέπε Παράδειγμα 1, Διάλεξη 1) βρίσκουμε

$$x = \xi e^{-t^2/2}, \qquad u = u_0(\xi)e^t$$

Έτσι η λύση σαν συνάρτηση των x και t γράφεται

$$u(x,t) = u_0(xe^{t^2/2})e^t.$$

6. Να λυθεί το μη γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = -x, \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Λύση

Η χαρακτηριστικές καμπύλες $\gamma : x = x(t)$ δίνονται από τη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u$$

και η εξίσωση πάνω σε αυτές παίρνει τη μορφή

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Κατά συνέπεια η κλίση της χαρακτηριστικής καμπύλης στο (x,t) είναι $u(x,t)$ και η u είναι σταθερή ως προς t πάνω στην καμπύλη, λύνοντας τις εξισώσεις έχουμε

$$u = c_1, \qquad x = c_1 t + c_2.$$

Τα αρχικά δεδομένα είναι

$$t = 0, \qquad x = \xi, \qquad u = -\xi,$$

οπότε παίρνουμε

$$u = -\xi, \qquad x = -\xi t + \xi = \xi(1-t) \Rightarrow \xi = \frac{x}{1-t}.$$

Επομένως

$$u(x,t) = \frac{x}{t-1},$$

και η λύση είναι ασυνεχής στο $t = 1$.

7. Να λυθεί το μη γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u^2 u_x + u_y = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0 \\ &u(x,0) = x, \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Λύση

Εκφράζοντας τις χαρακτηριστικές καμπύλες στη μορφή $(x(y), y)$, έχουμε το χαρακτηριστικό σύστημα

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = u^2, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 0,$$

με αρχικά δεδομένα

$$x(0) = \xi, \qquad u(0) = \xi, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Η u είναι σταθερή κατά μήκος των χαρακτηριστικών οι οποίες, συνεπώς, είναι ευθείες. Λύνοντας βρίσκουμε

$$x = \xi^2 y + \xi, \qquad u = \xi.$$

Έτσι έχουμε

$$y = 0 : u = \xi, \quad x = \xi \Rightarrow u = x$$

και

$$y \neq 0 : y\xi^2 + \xi - x = 0 \Rightarrow \xi = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4xy}}{2y}$$

οποτεδήποτε $1+4xy \geq 0$. Επομένως για $y \neq 0$ και $1+4xy \geq 0$ είναι

$$u(x,y) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4xy}}{2y}.$$

Επειδή

$$\lim_{y\to 0+} \frac{-1-\sqrt{1+4xy}}{2y} = -\infty,$$

ενώ

$$\lim_{y\to 0+} \frac{-1+\sqrt{1+4xy}}{2y} = \lim_{y\to 0+} \frac{4x}{4\sqrt{1+4xy}} = x,$$

έπεται ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$u(x,y) = \begin{cases} x, & y = 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+4xy}-1}{2y}, & y > 0 \end{cases}$$

η οποία ορίζεται και είναι συνεχής στο $y \geq 0, 1+4xy \geq 0$.

8. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} xu_y - yu_x &= u, \qquad && x > 0, \quad y > 0 \\ u(x,0) &= x, && x > 0, \quad y = 0. \end{aligned}$$

Λύση

Εκφράζοντας τις χαρακτηριστικές καμπύλες σε παραμετρική μορφή $x = x(s)$, $y = y(s)$ έχουμε το χαρακτηριστικό σύστημα

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = -y, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = x, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = u,$$

με αρχικές συνθήκες

$$x(0) = \xi, \qquad y(0) = 0, \qquad u(0) = \xi, \qquad \xi > 0.$$

Από τις x και y εξισώσεις προκύπτει ότι

$$\left\{x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=-xy, \quad y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=xy\right\} \Leftrightarrow \left\{\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}s}=-xy, \quad \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}s}=xy\right\}$$

απ' όπου προκύπτει

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(x^2+y^2)=0 \Rightarrow x^2+y^2=r^2=\text{σταθ.}.$$

Έτσι υπό το πρίσμα των αρχικών συνθηκών βρίσκουμε

$$x=\xi\cos s, \qquad y=\xi\sin s, \qquad 0<s<\frac{\pi}{2},$$

μιας και $x>0$ και $y>0$. Η λύση της u-εξίσωσης είναι

$$u=ce^s \overset{u(0)=\xi}{\Rightarrow} u=\xi e^s.$$

Από τις εκφράσεις των x και y έχουμε

$$x^2+y^2=\xi^2 \Rightarrow \xi=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (\xi>0)$$
$$\frac{y}{x}=\tan s \Rightarrow s=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

κατά συνέπεια η λύση της εξίσωσης είναι

$$u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\,e^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}.$$