ΑΜ 436 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Διάλεξη 18

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

4 Δεκεμβρίου 2019

Το ολοκλήρωμα Fourier

Αν μια καλή συνάρτηση δεν είναι περιοδική στο $\mathbb{R}$, τότε δεν μπορεί να παρασταθεί με μια τριγωνομετρική σειρά σ' ολόκληρη την ευθεία, ενώ κάλλιστα μπορεί σε κάθε πεπερασμένο διάστημα[1]. Στην περίπτωση αυτή μια ανάλογη αναπαράσταση παρέχει το **ολοκλήρωμα Fourier**. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση κατά τμήματα C^1 σε κάθε διάστημα $[a,b]$ για την οποία επιπλέον ισχύει ότι $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$. Έτσι για κάθε $L>0$ η f αναπτύσσεται σε σειρά Fourier

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\Big),\qquad -L<x<L \tag{1}$$

με συντελεστές

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x, &\qquad n&=0,1,2,\dots\\ b_n&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x, &\qquad n&=1,2,3,\dots \end{aligned} \tag{2}$$

[1]Στο εξωτερικό του διαστήματος η σειρά συγκλίνει στην περιοδική επέκταση της f και όχι στη συνάρτηση f.

Αντικαθιστώντας τις (2) στην (1) βρίσκουμε

$$f(x) = \int_{-L}^{L} \frac{f(y)}{2L}\,\mathrm{d}y + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^{L} \frac{f(y)}{L}\left(\cos\frac{n\pi y}{L}\cos\frac{n\pi x}{L} + \sin\frac{n\pi y}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}y$$

ή από τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y)\,\mathrm{d}y + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(y)\cos\frac{n\pi(y-x)}{L}\,\mathrm{d}y. \tag{3}$$

Στη συνέχεια θέλουμε να πάρουμε το όριο καθώς $L\to\infty$. Παρατηρούμε ότι από την υπόθεση ολοκληρωσιμότητας της $|f|$ προκύπτει ότι

$$\left|\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y)\,\mathrm{d}y\right| \le \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}|f(y)|\,\mathrm{d}y \le \frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|\,\mathrm{d}y \to 0$$

καθώς $L\to\infty$, έτσι θέτοντας $\pi/L = \Delta s$ από την (3) βρίσκουμε

$$f(x) = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(y)\cos[n\Delta s(y-x)]\Delta s\,\mathrm{d}y. \tag{4}$$

Η διαδικασία που ακολουθεί είναι καθαρά τυπική δίχως αυστηρότητα (φορμαλιστική). Το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήγουμε όμως, (6), ισχύει. Διατυπώνουμε το σχετικό θεώρημα, (στην επόμενη διαφάνεια) δίνοντας την απόδειξη στο Παράρτημα στο τέλος της παρούσας διάλεξης. Για μια διαφορετική απόδειξη παραπέμπουμε στο (Apostol, *Mathematical Analysis* 2nd edition, Addison-Wesley).

Αν τυπικά, από την (4), γράψουμε

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-L}^{L} f(y) \sum_{n=1}^{\infty} \cos[s_n(y-x)]\Delta s\, \mathrm{d}y, \qquad s_n = n\Delta s \tag{5}$$

τότε παρατηρώντας ότι τα σημεία $s_n = n\Delta s$ αποτελούν μια ομοιόμορφη διαμέριση του $[0,\infty)$ και ότι $\Delta s \to 0$ καθώς $L \to \infty$, η (5) γίνεται (τυπικά)

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{0}^{\infty} \cos[s(y-x)]\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}y,$$

και αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos[s(y-x)]\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}s. \tag{6}$$

Θεώρημα (Το ολοκλήρωμα Fourier)

Εάν η f είναι μια τμηματικά C^1 και απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $(-\infty,\infty)$ τότε στα σημεία συνέχειας της f ισχύει

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(y)\cos[s(y-x)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s$$

ενώ στα σημεία ασυνέχειας της f το ολοκλήρωμα συγκλίνει στο $\frac{1}{2}(f(x-)+f(x+))$.

Μπορούμε, αναπτύσσοντας, να γράψουμε την (6) ως

$$f(x) = \int_0^\infty (A(s)\cos sx + B(s)\sin sx)\,\mathrm{d}s \tag{7}$$

όπου

$$\begin{aligned} A(s) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(y)\cos sy\,\mathrm{d}y \\ B(s) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(y)\sin sy\,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{8}$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το ολοκλήρωμα Fourier της

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστες από την (8)

$$A(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos sy\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos sy\,\mathrm{d}y = \frac{2\sin s}{\pi s}$$

$$B(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\sin sy\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin sy\,\mathrm{d}y = 0,$$

έτσι από την (7) βρίσκουμε

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin s}{s}\cos sx\,\mathrm{d}s = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 1/2, & x = \pm 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \tag{9}$$

Πόρισμα (Ένα χρήσιμο ολοκλήρωμα)

Από την (9) για $x = 0$ βρίσκουμε

$$\int_0^\infty \frac{\sin s}{s}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Η εξίσωση της θερμότητας στην ευθεία

$$
\begin{aligned}
& u_t = k u_{xx}, && -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\
& u(x,0) = f(x), && -\infty < x < \infty \\
& u, u_x \quad \text{πεπερασμένα καθώς} && |x| \to \infty, \quad t > 0.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Υποθέτοντας ότι $u(x,t) = X(x)T(t)$, όπως και σε φραγμένο διάστημα, βρίσκουμε για κάποια σταθερά διαχωρισμού λ ότι

$$
\begin{aligned}
& X'' + \lambda X = 0, && x \in \mathbb{R} \quad \text{με } X, X' \text{ πεπερασμένες καθώς } |x| \to \infty \\
& \dot{T} + k\lambda T = 0, && t > 0
\end{aligned}
$$

Η συμπεριφορά της X στο $\pm\infty$ επιβάλλει $\lambda = s^2$, $s > 0$ (διαφορετικά θα είχαμε εκθετικές X), οπότε οι λύσεις είναι

$$
\left.
\begin{aligned}
& X_s(x) = A(s)\cos sx + B(s)\sin sx, && -\infty < x < \infty \\
& T_s(t) = e^{-ks^2 t}, && t > 0
\end{aligned}
\right\} \quad s > 0.
$$

Έτσι για κάθε $s > 0$ η

$$u(x,t;s) = (A(s)\cos sx + B(s)\sin sx)e^{-ks^2 t}$$

είναι λύση της εξίσωσης και έχει την επιθυμιτή συμπεριφορά καθώς $|x| \to \infty$, αλλά δεν ικανοποιεί, εν γένει, την αρχική συνθήκη. Όπως στη διακριτή περίπτωση θεωρούμε

$$u(x,t) = \int_0^\infty u(x,t;s)\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty [A(s)\cos sx + B(s)\sin sx]e^{-ks^2 t}\,\mathrm{d}s \qquad (12)$$

και απαιτούμε

$$u(x,0) = f(x) = \int_0^\infty [A(s)\cos sx + B(s)\sin sx]\,\mathrm{d}s \qquad (13)$$

οπότε

$$A(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos sy\,\mathrm{d}y, \qquad B(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\sin sy\,\mathrm{d}y. \qquad (14)$$

Αντικαθιστούμε τις (14) στην (12) και βρίσκουμε

$$u(x,t)=\int_0^\infty \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^\infty f(y)[\cos sy\cos sx+\sin sy\sin sx]\,\mathrm{d}y\right\}e^{-ks^2t}\,\mathrm{d}s$$

ή

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(y)\cos s(x-y)e^{-ks^2t}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s$$

ή από το Θεώρημα του Fubini

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(y)\int_0^\infty \cos s(x-y)e^{-ks^2t}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y.$$

Θα δείξουμε ότι

$$\int_0^\infty \cos s(x-y)e^{-ks^2t}\,\mathrm{d}y=\sqrt{\frac{\pi}{4kt}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}$$

οπότε τελικά η λύση του (11) θα είναι

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi 4kt}}\int_{-\infty}^\infty f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\,\mathrm{d}y. \tag{15}$$

Γνωρίζοντας ότι $\int_0^\infty e^{-s^2}\,\mathrm{d}s = \sqrt{\pi}/2$ δείχνουμε ότι

$$I(z) = \int_0^\infty \cos(sz)e^{-bs^2}\,\mathrm{d}s = \sqrt{\frac{\pi}{4b}}e^{-z^2/4b}. \qquad (16)$$

Πράγματι

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z}(z) &= \int_0^\infty -s\sin(sz)e^{-bs^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2b}\int_0^\infty \sin(sz)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}e^{-bs^2}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2b}\left(\sin(sz)e^{-bs^2}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty z\cos(sz)e^{-bs^2}\,\mathrm{d}s\right) \\
&= -\frac{1}{2b}z\int_0^\infty \cos(sz)e^{-bs^2}\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

συνεπώς

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z}(z) + \frac{z}{2b}I(z) = 0 \Rightarrow I(z) = I(0)e^{-z^2/4b}$$

που είναι η (16) αφού

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-bs^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^\infty e^{-(\sqrt{b}s)^2}\sqrt{b}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Η απόδειξη του Θεωρήματος (Το ολοκλήρωμα Fourier)

Θεώρημα (Riemann-Lebesgue)

Εάν η f είναι μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a,b]$, τότε

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(y)\sin\lambda y\,\mathrm{d}y=0. \tag{17}$$

Απόδειξη. Πρώτα δίνουμε την απόδειξη στην περίπτωση όπου η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$. Έστω

$$I(\lambda)=\int_a^b f(y)\sin\lambda y\,\mathrm{d}y. \tag{18}$$

Για λ μεγάλο ώστε $a<b-\pi/\lambda$ με την αλλαγή μεταβλητής $y=x+\pi/\lambda$ βρίσκουμε

$$I(\lambda)=-\int_{a-\pi/\lambda}^{b-\pi/\lambda} f(x+\pi/\lambda)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x, \tag{19}$$

αφού $\sin\lambda y=\sin(\lambda x+\pi)=-\sin\lambda x$. Προσθέτοντας τις (18) και (19) παίρνουμε

$$I(\lambda) = \frac{1}{2}\Big[\int_a^b f(y)\sin\lambda y\,\mathrm{d}y - \int_{a-\pi/\lambda}^{b-\pi/\lambda} f(y+\pi/\lambda)\sin\lambda y\,\mathrm{d}y\Big]$$

ισοδύναμα

$$I(\lambda) = \frac{1}{2}\Big\{\int_a^{b-\pi/\lambda}\Big[f(y) - f\Big(y-\frac{\pi}{\lambda}\Big)\Big]\sin\lambda y\mathrm{d}y$$
$$+\int_{b-\pi/\lambda}^{b} f(y)\sin\lambda y\,\mathrm{d}y - \int_{a-\pi/\lambda}^{a} f\Big(y-\frac{\pi}{\lambda}\Big)\sin\lambda y\,\mathrm{d}y\Big\}.$$

έτσι αν M είναι η μέγιστη τιμή της f στο $[a,b]$ έχουμε την εκτίμηση

$$|I(\lambda)| \le \frac{1}{2}\int_a^{b-\pi/\lambda}\Big|f(y) - f\Big(y-\frac{\pi}{\lambda}\Big)\Big|\mathrm{d}y + \frac{M\pi}{\lambda}. \tag{20}$$

Για δοσμένο $\epsilon > 0$ από την ομοιόμορφη συνέχεια της f στο διάστημα $[a,b]$ υπάρχει $\delta > 0$, ώστε $|f(y) - f(y-\pi/\lambda)| < \epsilon/(b-a)$ οποτεδήποτε $|\pi/\lambda| < \delta$. Επιλέγοντας, αν χρειάζεται, επιπλέον να ισχύει $M\delta < \epsilon/2$ από την (20) βρίσκουμε

$$|I(\lambda)| < \frac{\epsilon(b-\pi/\lambda-a)}{2(b-a)} + M\delta < \epsilon.$$

Αν τώρα η f είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[a,b]$ τότε, βλέπε την σχετική Παρατήρηση στην Διάλεξη 11,

$$\int_a^b f(y)\sin\lambda y\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{N}\int_{y_{n-1}}^{y_n} f(y)\sin\lambda y\,\mathrm{d}y, \qquad y_0 = a, \quad y_N = b$$

και σε κάθε υποδιάστημα $[y_{n-1}, y_n]$ η f, ξαναορισμένη στα άκρα όπου χρειάζεται, είναι συνεχής (γιατί;). Έτσι, από το πρώτο μέρος της απόδειξης, καθώς $\lambda \to \infty$ το κάθε ολοκλήρωμα του αθρίσματος στο δεξιό μέλος τείνει στο μηδέν, άρα το ίδιο συμβαίνει και στο πεπερασμένο άθροισμα. □

Θεώρημα

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση απολύτως ολοκληρώσιμη, δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\,\mathrm{d}y < \infty,$$

τότε

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\sin\lambda y\,\mathrm{d}y = 0. \tag{21}$$

Απόδειξη. Για $\epsilon > 0$ από την ολοκληρωσιμότητα της f έπεται ότι υπάρχει $R > 0$, ώστε

$$\left|\int_{-\infty}^{-R} f(y)\sin\lambda y\,\mathrm{d}y\right| + \left|\int_{R}^{\infty} f(y)\sin\lambda y\,\mathrm{d}y\right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{22}$$

Στο διάστημα $[-R,R]$ η f είναι κατά τμήματα συνεχής οπότε από το Θεώρημα Riemann-Lebesque για κάποιο $\Lambda > 0$ και $\lambda \geq \Lambda$ ισχύει

$$\left|\int_{-R}^{R} f(y)\sin\lambda y\,\mathrm{d}y\right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{23}$$

Το ζητούμενο έπεται από τις (22) και (23). □

Λήμμα

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin s}{s}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}. \tag{24}$$

Το αποτέλεσμα αυτό το πήραμε από το ολοκλήρωμα Fourier. Για την αποφυγή κυκλικών επιχειρημάτων δίνουμε μια διαφορετική απόδειξη. Μια τρίτη απόδειξη είναι μια που χρησιμοποιεί τεχνικές των ολοκληρωτικών υπολοίπων και βρίσκεται σχεδόν σε κάθε βιβλίο Μιγαδικής Ανάλυσης.

Απόδειξη του Λήμματος. Η συνάρτηση $g(x,y) = e^{-xy}\sin y$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$, συνεπώς για κάθε $s>0$ και $t>0$ ισχύει

$$\int_{y=0}^{t}\int_{x=0}^{s} e^{-xy}\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{s}\int_{y=0}^{t} e^{-xy}\sin y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Επειδή το ολοκλήρωμα

$$\int_{x=0}^{\infty}\Big[\int_{y=0}^{\infty} e^{-xy}\sin y\,\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x$$

υπάρχει, βλέπε (26) στην επόμενη διαφάνεια, έπεται ότι

$$\int_{y=0}^{\infty}\Big[\int_{x=0}^{\infty} e^{-xy}\sin y\,\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{\infty}\Big[\int_{y=0}^{\infty} e^{-xy}\sin y\,\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x. \tag{25}$$

Για το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (25) υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\int_{y=0}^{\infty} e^{-xy}\sin y\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\infty}\Big(-\frac{e^{-xy}}{x}\Big)'\sin y\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{e^{-xy}}{x}\sin y\Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{e^{-xy}}{x}\cos y\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{x}\int_0^{\infty}\Big(-\frac{e^{-xy}}{x}\Big)'\cos y\,\mathrm{d}y\\ &= -\frac{e^{-xy}}{x^2}\cos y\Big]_0^{\infty} - \frac{1}{x^2}\int_0^{\infty} e^{-xy}\sin y\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Έτσι

$$\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big)\int_0^{\infty} e^{-xy}\sin y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-xy}\sin y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{1+x^2},$$

κατά συνέπεια

$$\int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty} e^{-xy}\sin y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}. \tag{26}$$

Το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (25) δίνει

$$\begin{aligned}\int_{y=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} e^{-xy}\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{y=0}^{\infty}\Big(\sin y\int_{x=0}^{\infty} e^{-xy}\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y\\ &= \int_{y=0}^{\infty}\sin y\Big[-\frac{e^{-xy}}{y}\Big]_{x=0}^{\infty}\mathrm{d}y \qquad (27)\\ &= \int_{0}^{\infty}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Έτσι από τις (25), (26) και (27) προκύπτει το ζητούμενο. □

Άμεση συνέπεια του Λήμματος είναι ότι για $\lambda > 0$ ισχύει

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin\lambda s}{s}\,\mathrm{d}s = \int_{0}^{\infty}\frac{\sin\lambda s}{s}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2} \qquad \lambda > 0. \qquad (28)$$

Πράγματι, αφενός

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\lambda s}{s}\,\mathrm{d}s = \int_{0}^{\infty}\frac{\sin\lambda s}{\lambda s}\,\lambda\mathrm{d}s = \int_{0}^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}$$

και αφετέρου

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin\lambda s}{s}\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{0} \frac{-\sin\lambda s}{-s}\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin(-\lambda s)}{-s}\,\mathrm{d}s = -\int_{\infty}^{0} \frac{\sin\lambda s}{s}\,\mathrm{d}s$$
$$= \int_{0}^{\infty} \frac{\sin\lambda s}{s}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος. Από τον ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(y)\cos[s(y-x)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda \int_{-\infty}^\infty f(y)\cos[s(y-x)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s$$
$$= \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(y)\int_0^\lambda \cos[s(y-x)]\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y$$

αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης αφού $|f(y)\cos[s(y-x)]| \le |f(y)|$ και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη

$$= \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(y)\frac{\sin[\lambda(y-x)]}{y-x}\,\mathrm{d}y.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $t = y - x$ η τελευταία ισότητα γίνεται

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(y)\cos[s(y-x)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t,$$

οπότε για να αποδείξουμε ότι

$$\frac{f(x-)+f(x+)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(y)\cos[s(y-x)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{f(x-)+f(x+)}{2} \tag{29}$$

Επειδή ένεκα της (28)

$$\frac{1}{2}f(x-)+\frac{1}{2}f(x+) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 f(x-)\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x+)\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t$$

η προς απόδειξη σχέση (29) προκύπτει από τις

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{0}[f(x+t)-f(x-)]\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t=0 \tag{30}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{0}^{\infty}[f(x+t)-f(x+)]\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t=0 \tag{31}$$

Αποδεικνύουμε την (31). Η (30) αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο. Γράφουμε την (31) ως

$$I=\int_0^\infty \frac{f(x+t)-f(x+)}{t}\sin\lambda t\,\mathrm{d}t=I_1+I_2-I_3$$

όπου για κάποιο θετικό αριθμό β

$$I_1=\int_0^\beta \frac{f(x+t)-f(x+)}{t}\sin\lambda t\,\mathrm{d}t$$

$$I_2=\int_\beta^\infty \frac{f(x+t)}{t}\sin\lambda t\,\mathrm{d}t$$

$$I_3=f(x+)\int_\beta^\infty \frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Για το I_1: Από την υπόθεση για τις f και f' η

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x+)}{t}, \qquad 0 < t \leq \beta,$$

είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[0, \beta]$, αφού

$$\lim_{t \to 0+} g(t) = f'_{+}(x)$$

επομένως από το Θεώρημα Riemann-Lebesgue έπεται ότι $I_1 \to 0$ καθώς $\lambda \to \infty$.

Για το I_2: Η $f(x+t)/t$ είναι κατά τμήματα συνεχής και απολύτως ολοκληρώσιμη στο $\beta \leq t < \infty$ κατά συνέπεια από την επέκταση του Θεωρήματος Riemann-Lebesgue έπεται ότι $I_2 \to 0$ καθώς $\lambda \to \infty$.

Για το I_3: Με αλλαγή μεταβλητής έχουμε

$$I_3 = f(x+) \int_{\lambda\beta}^{\infty} \frac{\sin s}{s} \, \mathrm{d}s = f(x+) \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\lambda\beta} \frac{\sin s}{s} \, \mathrm{d}s \right) \to 0$$

καθώς $\lambda \to \infty$ από το Λήμμα.

Συνεπώς $I \to 0$ καθώς $\lambda \to \infty$ που είναι η (31). Η απόδειξη είναι πλήρης.