AM 436 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Διάλεξη 14

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

20 Νοεμβρίου 2019

Η κυματική εξίσωση σε πεπερασμένο διάστημα (συνέχεια)

Είδαμε ότι για το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} &u_{tt} = c^2 u_{xx}, && 0 < x < \ell, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), && 0 < x < \ell \\ &u(0,t) = u(\ell,t) = 0 && t > 0, \end{aligned} \tag{1}$$

όπου $\phi(0) = \phi(\ell) = 0$ και $\psi(0) = \psi(\ell) = 0$, υποθέτοντας ότι $u(x,t) = X(x)T(t)$ βρήκαμε ότι οι X και T είναι λύσεις των

$$X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < \ell, \qquad X(0) = X(\ell) = 0 \tag{2}$$

$$\ddot{T} + \lambda c^2 T = 0. \tag{3}$$

Οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του X-προβλήματος είναι

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \qquad X(x) = X_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

ενώ οι αντίστοιχες λύσεις της T-εξίσωσης είναι

$$T(t) = T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi c t}{\ell} + B_n \sin\frac{n\pi c t}{\ell}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Κατά συνέπεια για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και σταθερές A_n, B_n η

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi c t}{\ell} + B_n \sin\frac{n\pi c t}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

είναι λύση της κυματικής εξίσωσης η οποία επιπλέον ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες, όπως και κάθε άθροισμα πεπερασμένου πλήθους τέτοιων λύσεων είναι επίσης λύση που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Το **τυπικό** άθροισμα

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi c t}{\ell} + B_n \sin\frac{n\pi c t}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell} \qquad (6)$$

είναι ``λύση'' του προβλήματος (1) αν οι συντελεστές A_n και $B_n(n\pi c/\ell)$ είναι οι συντελεστές Fourier των ϕ και ψ, αφού προς ικανοποίηση των αρχικών συνθηκών θα πρέπει

$$u(x,0) = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} \qquad (7)$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}. \qquad (8)$$

Παρατήρηση

Σχετικά με τη λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών για την κυματική εξίσωση, μέσω της λύσης του d' Alembert βλέπουμε ότι αν οι ϕ και ψ είναι C^2 και C^1 αντίστοιχα, τότε το πρόβλημα έχει C^2 λύση, αυτή του d' Alembert, η οποία επιπλέον είναι μοναδική, βλέπε Πρόταση 2.2 (Ακρίβης-Αλικάκος).

Θεωρούμε λοιπόν ότι οι ϕ'' και ψ' είναι συνεχείς και οι ϕ''' και ψ'' κατά τμήματα συνεχείς επιπλέον των $\phi(0) = \phi(\ell) = \psi(0) = \psi(\ell) = 0$, και έστω

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi c t}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi c t}{\ell} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \tag{9}$$

όπου οι συντελεστές δίνονται από τις σχέσεις

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, \mathrm{d}x, \qquad B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, \mathrm{d}x \tag{10}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$. Δείχνουμε ότι η (9) είναι η λύση του προβλήματος (1).

Εκτίμηση των A_n, B_n. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \phi(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \phi(x)\Big(-\frac{\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\Big)'\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\ell}\Big\{-\phi(x)\frac{\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\Big]_0^\ell + \frac{\ell}{n\pi}\int_0^\ell \phi'(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x\Big\} \\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^\ell \phi'(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\int_0^\ell \phi'(x)\Big(\frac{\ell}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\Big)'\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{n\pi}\Big\{\phi'(x)\frac{\ell}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\Big]_0^\ell - \frac{\ell}{n\pi}\int_0^\ell \phi''(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x\Big\} \\
&= \frac{2\ell}{n^2\pi^2}\int_0^\ell -\phi''(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\ell^2}{n^3\pi^3}\Big\{\phi''(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\Big]_0^\ell - \int_0^\ell \phi'''(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x\Big\}
\end{aligned}$$

επομένως

$$|A_n| \le \frac{2\ell^2}{n^3\pi^3}\Big(|\phi''(0)| + |\phi''(\ell)| + \int_0^\ell |\phi'''(x)|\,\mathrm{d}x\Big) \le \frac{A}{n^3} \tag{11}$$

Όμοια

$$\frac{n\pi c}{\ell}B_n = \frac{2\ell}{n^2\pi^2}\int_0^\ell -\psi''(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x$$

οπότε

$$|B_n| \le \frac{2\ell^2}{n^3\pi^3 c}\int_0^\ell |\psi''(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{B}{n^3} \tag{12}$$

Από τις (11), (12) και το κριτήριο του Weierstrass έπεται ότι η σειρά (9) συγκλίνει ομοιόμορφα και απολύτως κατά συνέπεια το όριο, η $u(x,t)$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες αφού κάθε όρος της σειράς τις ικανοποιεί. Επιπλέον

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} = \phi(x)$$

από τον ορισμό των A_n. Οι σειρές των μερικών παραγώγων των όρων

$$u_t(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{\ell}\left(-A_n\sin\frac{n\pi ct}{\ell} + B_n\cos\frac{n\pi ct}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$u_x(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{\ell}\left(A_n\cos\frac{n\pi ct}{\ell} + B_n\sin\frac{n\pi ct}{\ell}\right)\cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

και πάλι από το κριτήριο του Weierstrass συγκλίνουν ομοιόμορφα, κατά συνέπεια, βλέπε Θεώρημα 3, Πόρισμα, και Θεώρημα 4 Κεφάλαιο 23 (Spivak), οι μερικές παράγωγοι u_t και u_x της u υπάρχουν και είναι τα αντίστοιχα όρια

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{\ell}\Big(-A_n \sin\frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \cos\frac{n\pi ct}{\ell}\Big)\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$u_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\ell}\Big(A_n \cos\frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{\ell}\Big)\cos\frac{n\pi x}{\ell}.$$

Έτσι

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{\ell} B_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} = \psi(x)$$

από την επιλογή των B_n. Απομένει να δείξουμε ότι οι σειρές των δεύτερων μερικών παραγώγων συγκλίνουν και ότι ικανοποιούν την εξίσωση. Οι σειρές των δεύτερων μερικών παραγώγων των όρων είναι

$$u_{tt}(x,t) \sim -c^2\frac{\pi^2}{\ell^2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\Big(A_n \cos\frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{\ell}\Big)\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$u_{xx}(x,t) \sim -\frac{\pi^2}{\ell^2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\Big(A_n \cos\frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{\ell}\Big)\sin\frac{n\pi x}{\ell}.$$

Οι εκτιμήσεις (11), (12) δεν εξασφαλίζουν σύγκλιση των σειρών. Απαιτούμε επιπλέον να ισχύει η συνθήκη $\phi''(0) = \phi''(\ell) = 0$. Τότε θα έχουμε

$$A_n = -\frac{2\ell^2}{n^3\pi^3}\int_0^\ell \phi'''(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x.$$

Θέτουμε

$$A_n^* = \int_0^\ell \phi'''(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x$$

και από τη σχέση

$$0 \le \left(|A_n^*| - \frac{1}{n}\right)^2 = |A_n^*|^2 - \frac{2|A_n^*|}{n} + \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{|A_n^*|}{n} \le \frac{1}{2}\left(|A_n^*|^2 + \frac{1}{n^2}\right)$$

βρίσκουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|A_n^*|}{n} \le \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|A_n^*|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right) \le C_1\int_0^\ell |\phi'''(x)|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6} < +\infty$$

από την ανισότητα του Bessel.

όμοια για

$$B_n^* = \int_0^\ell \psi''(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, \mathrm{d}x$$

παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|B_n^*|}{n} \leq \frac{1}{2} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |B_n^*|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Big) \leq C_2 \int_0^\ell |\psi''(x)|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{6} < +\infty.$$

Έτσι

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|A_n| + |B_n|) = \frac{2\ell^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{|A_n^*|}{n} + \frac{|B_n^*|}{cn} \Big) < +\infty$$

γεγονός που έχει σαν αποτέλεσμα οι σειρές των δεύτερων μερικών παραγώγων να συγκλίνουν ομοιόμορφα και να παριστούν τις u_{tt} και u_{xx} αντίστοιχα. Επιπλέον από τις εκφράσεις αυτές βλέπουμε ότι η κυματική εξίσωση ικανοποιείται κατά συνέπεια η (9) να είναι η λύση του προβλήματος (1).

Παρατήρηση (Προς αποφυγή της περιπτωσιολογίας)

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών Sturm-Liouville

$$(p(x)y')' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0, \qquad a < x < b, \tag{13}$$

$$y(a) = 0 \quad \text{είτε} \quad y'(a) = 0, \qquad y(b) = 0 \quad \text{είτε} \quad y'(b) = 0 \tag{14}$$

όπου $p(x) > 0$ και $r(x) > 0$ στο (a,b) και p', q και r είναι συνεχείς στο $[a,b]$, και A και B σταθερές. Αν λ είναι ιδιοτιμή του προβλήματος και ϕ η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση $L\phi + \lambda r\phi = 0$ με ϕ και ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\int_a^b [(p\phi')' + q\phi]\phi \,\mathrm{d}x + \lambda \int_a^b r\phi^2 \,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow$$

$$\int_a^b p[\phi']^2 \mathrm{d}x - \int_a^b q\phi^2 \,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b r\phi^2 \,\mathrm{d}x \Rightarrow \lambda \geq -\frac{\int_a^b q\phi^2 \,\mathrm{d}x}{\int_a^b r\phi^2 \,\mathrm{d}x}$$

από τις συνοριακές συνθήκες και την υπόθεση για τις p, r και ϕ.

Πόρισμα

Ειδικά για το πρόβλημα

$$X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < \ell, \qquad X(0) = X(\ell) = 0.$$

εάν λ και X αποτελούν ιδιοζεύγος, τότε

$$\int_0^\ell (X')^2 \,\mathrm{d}x = \lambda \int_0^\ell X^2 \,\mathrm{d}x \Rightarrow \lambda \geq 0.$$

Είναι δε

$$\lambda = 0 \Leftrightarrow X' = 0 \Leftrightarrow X = ax + b.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι αν λ_n και ϕ_n είναι ιδιοζεύγος, τότε

$$\lambda_n = \frac{\int_0^\ell (\phi_n')^2}{\int_0^\ell \phi_n^2}.$$

Η ανάλογη έκφραση ισχύει και για το γενικό πρόβλημα.