AM 436 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Διάλεξη 11

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

6 Νοεμβρίου 2019

Γύρω στο 1807 ο Jean Batist Joseph Fourier ανακοίνωσε ξαφνιάζοντας τον κύκλο των μαθηματικών της εποχής ότι μια τυχαία συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί με μια σειρά ημιτόνων και συνημιτόνων. Να θυμηθούμε στο σημείο αυτό ότι στην προσπάθειά μας να βρούμε τη λύση της κυματικής εξίσωσης σε πεπερασμένο διάστημα είδαμε ότι η αρχική συνθήκη ϕ παρίσταται ως

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}.$$

Ας υποθέσουμε ότι η σειρά συγκλίνει στη ϕ ομοιόμορφα στο διάστημα $[-\ell, \ell]$. Πολλαπλασιάζοντας με $\sin(k\pi x/\ell)$ και ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\int_{-\ell}^{\ell} \phi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{-\ell}^{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \,\mathrm{d}x,$$

λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης. Υπολογίζοντας

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \,\mathrm{d}x = \frac{\ell}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big[\cos(k-n)x - \cos(k+n)x\Big] \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \ell, & k = n \end{cases}$$

βρίσκουμε

$$\int_{-\ell}^{\ell} \phi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, \mathrm{d}x = A_k \ell \Rightarrow A_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \phi(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \, \mathrm{d}x$$

Ορισμός

Έστω f μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[-\ell, \ell]$, μια συνάρτηση δηλαδή για την οποία $\int_{-\ell}^{\ell} |f(x)| \, \mathrm{d}x < +\infty$, η σειρά

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right) \tag{1}$$

με συντελεστές

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, \mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

λέγεται **σειρά Fourier** της f. Συνήθως γράφουμε $f(x) \sim S[f](x)$.

Εσωτερικό γινόμενο και ορθογωνιότητα

Η σχέση

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\ell}^{\ell} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

ορίζει ένα **εσωτερικό γινόμενο** στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[-\ell,\ell]$, βλέπε Παράρτημα. Δύο τέτοιες συναρτήσεις f και g θα λέγονται **οθογώνιες** και θα γράφουμε $f \perp g$ αν $\langle f, g\rangle = 0$. Ισχύουν οι σχέσεις

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{n\pi x}{\ell}\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = \int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \ell, & k = n \end{cases} \tag{5}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = \int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = \int_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = 0 \tag{6}$$

Έτσι το σύστημα

$$\mathscr{O} = \left\{1, \cos\frac{\pi x}{\ell}, \sin\frac{\pi x}{\ell}, \cos\frac{2\pi x}{\ell}, \sin\frac{2\pi x}{\ell}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \ldots\right\}$$

είναι ένα ορθογώνιο σύστημα, δηλαδή τα στοιχεία του είναι ανά δύο ορθογώνια μεταξύ τους.

Παράδειγμα (Δ11-01)

Να βρεθεί η σειρά Fourier της $f(x) = x$, $-\pi \le x \le \pi$.

Υπολογίζουμε τους συντελεστές της σειράς

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{(περιττή συνάρτηση)} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\Big(-\frac{1}{n}\cos(nx)\Big)'\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{x}{n\pi}\cos(nx)\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2\cos(n\pi)}{n} \\ &= (-1)^{n+1}\frac{2}{n} \qquad n = 1,2,\ldots \end{aligned}$$

Έτσι

$$S[f](x) = 2\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx + \cdots$$

Γράφουμε επίσης

$$x \sim 2\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx + \cdots$$

Σύγκλιση της σειράς Fourier

Κάποια από τα ερωτήματα που μας απασχολούν είναι (ι) για ποιές f στο $[-\ell,\ell]$ η σειρά Fourier $S[f]$ της f συγκλίνει και με ποιά έννοια; (ιι) αν η $S[f]$ συγκλίνει είναι το όριο της σειράς η f;

Αν $S_n[f](x)$ είναι το n-τάξης μερικό άθροισμα της $S[f]$ θα λέμε ότι

1. Η $S[f]$ **συγκλίνει σημειακά** στην f στο $x \in [-\ell,\ell]$ αν για $\epsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\epsilon, x)$ ώστε
$$|f(x) - S_n[f](x)| < \epsilon \qquad \text{αν } n \geq N.$$
2. Η $S[f]$ **συγκλίνει ομοιόμορφα** στην f στο $[-\ell,\ell]$ αν για $\epsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\epsilon)$ ώστε
$$|f(x) - S_n[f](x)| < \epsilon \qquad \text{αν } n \geq N \text{ για κάθε } x \in [-\ell,\ell].$$
3. Η $S[f]$ **συγκλίνει με την L^2 έννοια** στην f στο $[-\ell,\ell]$ αν για $\epsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\epsilon)$ ώστε
$$\int_{-\ell}^{\ell} |f(x) - S_n[f](x)|^2 \,\mathrm{d}x < \epsilon \qquad \text{αν } n \geq N.$$

Ορισμός

Η f λέγεται **κατά τμήματα συνεχής** στο $[a,b]$ εάν υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ ώστε η f να είναι συνεχής σε κάθε διάστημα (x_k, x_{k+1}) και τα πλευρικά όρια $f(x_k+)$ και $f(x_{k+1}-)$ υπάρχουν και είναι πεπερασμένα για όλα τα k. Η f λέγεται κατά τμήματα C^1 στο $[a,b]$ εάν οι f και f' είναι κατά τμήματα συνεχείς στο $[a,b]$.

Θυμίζουμε ότι

$$f(x-) = \lim_{\epsilon \to 0+} f(x-\epsilon), \qquad f(x+) = \lim_{\epsilon \to 0+} f(x+\epsilon).$$

1. Κάθε συνεχής συνάρτηση στο $[-\ell,\ell]$ είναι κατά τμήματα συνεχής.
2. Εάν η f είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[-\ell,\ell]$ και $f(x) = f(x+2\ell)$, τότε η f είναι κατά τμήματα συνεχής στο $\mathbb{R}$.
3. Εάν οι f και g είναι κατά τμήματα συνεχείς στο $[-\ell,\ell]$, τότε και οι $f \pm g$ και fg είναι κατά τμήματα συνεχείς στο $[-\ell,\ell]$.

Παρατήρηση

Εάν η f είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[-\ell,\ell]$, τότε το $\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\mathrm{d}x$ υπάρχει και είναι ανεξάρτητο των τιμών της f στα σημεία ασυνέχειας. Ειδικά αν οι f και g είναι τμηματικά συνεχείς στο $[-\ell,\ell]$ και ταυτίζονται εκτός από τα σημεία ασυνέχειας τότε

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\ell}^{\ell} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Για μια συνάρτηση f η αντίστοιχη σειρά Fourier υπάρχει αν οι $f(x)\cos nx$ και $f(x)\sin nx$ είναι απλά ολοκληρώσιμες. Το γεγονός όμως αυτό επ΄ ουδενί εξασφαλίζει ότι η σειρά σύγκλινει. Υπάρχουν συναρτήσεις για τις οποίες η παραγόμενη σειρά Fourier είτε δεν συγκλίνει σε αυτές, ή δεν συγκλίνει. Η κλάση των τμηματικά C^1 συναρτήσεων συμπεριφέρεται καλά όσον αφορά την σημειακή ή ομοιόμορφη σύγκλιση. Η συνθήκη είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία αφού, για παράδειγμα, η $|x|^{1/2}$ ενώ δεν είναι τμηματικά C^1 σε διάστημα γύρω από το 0 η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει.

Κάθε όρος μιας σειράς Fourier είναι μια 2ℓ-περιοδική συνάρτηση, κατά συνέπεια εκεί όπου η σειρά συγκλίνει παριστάνει μια 2ℓ-περιοδική συνάρτηση.

Θεώρημα (σημειακή σύγκλιση)

Αν η f είναι κατά τμήματα C^1 στο $[-\ell,\ell]$ και $f(x)=f(x+2\ell)$, τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει σημειακά για όλα τα x. Το άθροισμα της σειράς στο x είναι το $f(x)$, αν το x είναι σημείο συνεχείας της f, και $\frac{1}{2}(f(x-)+f(x+))$ αν το x είναι σημείο ασυνέχειας της f.

Θεώρημα (ομοιόμορφη σύγκλιση)

Αν η f είναι συνεχής στο $[-\ell,\ell]$, $f(-\ell)=f(\ell)$, η f' είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[-\ell,\ell]$ και $f(x)=f(x+2\ell)$ για όλα τα x, τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα στην f σε κάθε πεπερασμένο διάστημα.

Θεώρημα (L^2 σύγκλιση)

Εάν $\int_{-\ell}^{\ell}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x<\infty$, τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει με την L^2 έννοια στην f, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\ell}^{\ell}|f(x)-S_n[f](x)|^2\,\mathrm{d}x=0.$$

Θεώρημα

Αν η f είναι συνεχής στο $[-\ell,\ell]$, $f(x+2\ell)=f(x)$, και η f' είναι τμηματικά C^1 στο $[-\ell,\ell]$, τότε για τη σειρά Fourier της f ισχύει

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S[f](x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{\ell}\left(-a_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

και η οποία συγκλίνει σημειακά στο $f'(x)$ οποτεδήποτε η $f''(x)$ υπάρχει.

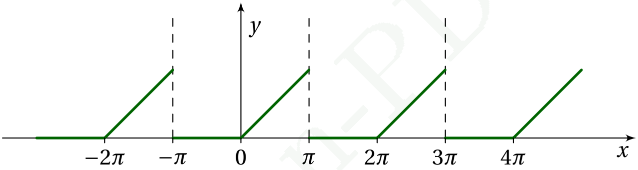
Θεώρημα

Αν η f είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[-\ell,\ell]$ και $f(x+2\ell)=f(x)$, τότε η σειρά Fourier της f ολοκληρώνεται όρο προς όρο και παράγει μια σειρά η οποία συγκλίνει σημειακά στο ολοκλήρωμα της f

$$\int_{-\ell}^{x}f(s)\,\mathrm{d}s=\frac{a_0}{2}(x+\ell)+\frac{\ell}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin\frac{n\pi x}{\ell}-\frac{b_n}{n}\cos\frac{n\pi x}{\ell}+(-1)^n\frac{b_n}{n}\right).$$

Παράδειγμα (Δ11-02)

Να βρεθεί η σειρά Fourier της $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$.



Υπολογίζουμε τους συντελεστές της σειράς

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[0 + \int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x\right] = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \qquad n = 1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad n = 1,2,\ldots$$

Έτσι

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \Big] \\ &= \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{2}{(2n-1)^2 \pi} \cos(2n-1)x + \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \Big] \end{aligned}$$

Η f είναι συνεχής στο $[-\pi, \pi]$ και η f' είναι τμηματικά συνεχής στο ίδιο διάστημα κατά συνέπεια η σειρά Fourier συγκλίνει σημειακά στην f στο $(-\pi, \pi)$, δηλαδή

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{2}{(2n-1)^2 \pi} \cos(2n-1)x + \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \Big] = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Έξω από το διάστημα αυτό και εκτός των σημείων $x = \pm(2n-1)\pi$ η σειρά συγκλίνει στην 2π-περιοδική επέκταση της f, για παράδειγμα στο $x = 7\pi/2$ η σειρά συγκλίνει στο $f(-\pi/2) = 0$, αφού $7\pi/2 = -\pi/2 + 4\pi$. Στα σημεία $x = \pm(2n-1)\pi$ η σειρά συγκλίνει στο

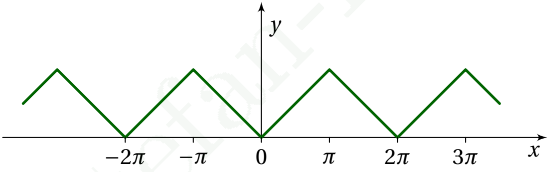
$$\frac{1}{2}(f(-\pi+) + f(\pi-)) = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ειδικά για $x = \pi$ έχουμε

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos(2n-1)\pi}{(2n-1)^2\pi} \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Παράδειγμα (Δ11-03)

Να βρεθεί η σειρά Fourier της $f(x) = |x|$, $-\pi \le x \le \pi$.



Υπολογίζουμε τους συντελεστές της σειράς

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin(nx)\, \mathrm{d}x = 0 \qquad \text{(περιττή συνάρτηση)} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Η f είναι συνεχής, η f' είναι τμηματικά συνεχής και επιπλέον $f(-\pi) = f(\pi)$ κατά συνέπεια η σειρά Fourier

$$S[f] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[-\pi, \pi]$ και στην 2π περιοδική επέκταση της f στην πραγματική ευθεία. Επομένως

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \qquad -\pi \le x \le \pi.$$

Για το παράδειγμα Δ11-01 έχουμε ότι για κάθε $-\pi < x < \pi$ είναι

$$x = 2\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx + \cdots \qquad \text{(σημειακά)}$$

ενώ για $x = \pm\pi$ η σειρά συγκλίνει στο $0 = (-\pi + \pi)/2$. Παρατηρήστε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx = x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \qquad 0 \le x < \pi.$$

Παράρτημα

Στο χώρο $\mathscr{C}[a,b]$ των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a,b]$ η σχέση

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x) g(x)\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο.

Πράγματι αν $f, g, h \in \mathscr{C}[a,b]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

(1)

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος αφού $f^2(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Επιπλέον από τις ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων και του ολοκληρώματος έπεται ότι

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b] \Leftrightarrow f = 0.$$

(2) Από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος

$$\begin{aligned}\langle f+g,h\rangle &= \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)h(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b \big(f(x)h(x)+g(x)h(x)\big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle.\end{aligned}$$

(3) Όμοια

$$\langle \lambda f,g\rangle = \int_a^b \lambda f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\langle f,g\rangle.$$

(4) Τέλος

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \langle g,f\rangle.$$

Κατά συνέπεια η (7) ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο $\mathscr{C}[a,b]$.

Στην απόδειξη του (1) χρησιμοποιήσαμε το εξής αποτέλεσμα:

Λήμμα

Έστω ότι η h είναι συνεχής στο $[a,b]$, $h(x) \geq 0$ και $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0$, τότε $h(x) = 0$ στο $[a,b]$.

Απόδειξη.

Πράγματι υποθέτοντας ότι υπάρχει $c \in [a,b]$ με $h(c) = \epsilon > 0$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c \in (a,b)$ (γιατί;) και από τη συνέχεια της h έπεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(c-\delta, c+\delta) \subset [a,b]$ και $h(x) \geq \epsilon/2$ στο $(c-\delta, c+\delta)$, οπότε αφού $h(x) \geq 0$ θα είναι

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} h(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{\epsilon}{2}\,\mathrm{d}x = \epsilon\delta > 0$$

το οποίο είναι άτοπο αφού $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι υπάρχει c με $h(c) \neq 0$, κατά συνέπεια $h(x) = 0$ για κάθε x στο $[a,b]$. □