AM 436 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Διάλεξη 6

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ε. Στεφανόπουλος

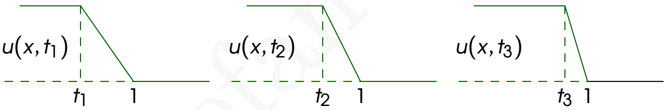
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

16 Οκτωβρίου 2019

Η εξίσωση του Burgers

$$u_t + uu_x = 0 \tag{1}$$

είναι ένας νόμος ο οποίος περιγράφει την εξέλιξη συγκεκριμένων φαινομένων. Με αυτή την έννοια σε σχέση με το Παράδειγματην Δ5-1 μπορούμε να πούμε ότι η λύση του προβλήματος για $t < 1$ περιγράφει την εξέλιξη του αρχικού κύματος $\phi(x)$ σύμφωνα με τον νόμο (1). Στο Σχήμα δίνονται τρία στιγμιότυπα της εξέλιξης αυτής τις χρονικές στιγμές $0 < t_1 < t_2 < t_3 < 1$.



Παρατηρούμε ότι το επάνω τμήμα του κύματος κινείται πιο γρήγορα από το κάτω, καθώς ο χρόνος μεταβάλλεται, και τη χρονική στιγμή $t = 1$ το επάνω μέρος φτάνει το κάτω, το κύμα ``σπάει'' και δημιουργείται **κρουστικό κύμα** (**shock wave**), όπως λέγεται. Είναι αυτό που περιγράφει η ασθενής μη συνεχής λύση που παίρνουμε για $t \geq 1$.

Κρουστικά κύματα παρατηρούνται συνήθως σε εκρήξεις, στην οδική ροή, σε αεροπλάνα που σπάνε το φράγμα του ήχου ή στην κίνηση των παγετώνων. Το απλούστερο τυπικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για την περιγραφή τέτοιων φαινομένων είναι συνήθως μια πρωτοτάξια εξίσωση

$$u_t + a(u)u_x = 0. \tag{2}$$

όπου a είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση.

Παράδειγμα (Δ6-1)

Να βρεθεί η λύση κρουστικό κύμα για το πρόβλημα Cauchy

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x = 0, && x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi_1(x), && x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

όπου

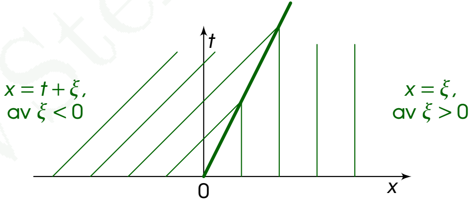
$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}.$$

Εδώ η $a(\phi_1(x)) = \phi_1(x)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του x, κατά συνέπεια δεν υπάρχει συνεχής λύση ορισμένη σε ολόκληρο το ημιεπίπεδο $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, βλέπε Παράδειγμα Δ4-7. Υπάρχει όμως η ασθενής λύση κρουστικό κύμα του οποίου η ταχύτητα σ δίνεται από τη συνθήκη άλματος (Runkine-Hugoniot)

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{A(u^+) - A(u^-)}{u^+ - u^-} = \frac{0^2/2 - 1^2/2}{0 - 1} = \frac{1}{2}$$

και είναι, κατά συνέπεια, η

$$u_1(x,t) = \begin{cases} 1, & x < t/2 \\ 0, & x > t/2 \end{cases}.$$



Παράδειγμα (Δ6-2 Αραιωτικό κύμα (expansion wave))

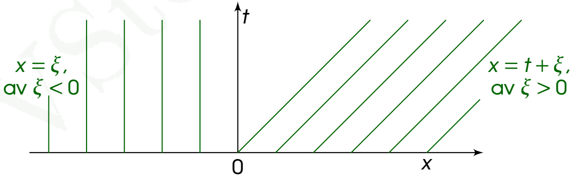
Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα Cauchy

$$\begin{aligned} u_t + u u_x &= 0, && x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \phi_2(x), && x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

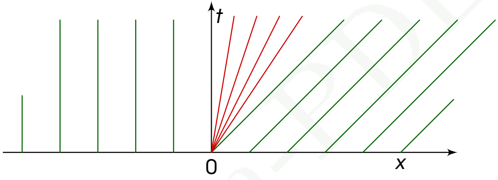
όπου

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Εδώ η $a(\phi_2(x)) = \phi_2(x)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του x, κατά συνέπεια οι χαρακτηριστικές δεν τέμνονται



Οι χαρακτηριστικές ευθείες δεν καλύπτουν ολόκληρο το ημιεπίπεδο. Θεωρητικά το κενό μπορεί να καλυφθεί με μια ``βεντάλια'' ημιευθειών που εκτείνονται από την $x=0$, έως την $x=t$ και είναι οι $x=\xi t$ με $0<\xi<1$.



Επιπλέον υπάρχει συνεχής λύση ορισμένη σε ολόκληρο το ημιεπίπεδο $\mathbb{R}\times(0,\infty)$, το **αραιωτικό κύμα**

$$u_2(x,t)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x}{t}, & 0<x<t\\ 1, & x\ge t\end{cases},$$

μιας και

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{t}\right)+\frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{t}\right)=-\frac{x}{t^2}+\frac{x}{t}\frac{1}{t}=0.$$

Παράδειγμα (Δ6-3)

Σε σχέση με το Παράδειγμα Δ6-2

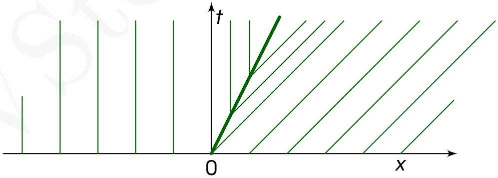
Παρατηρούμε ότι επιλέγοντας $u^- = 0$ και $u^+ = 1$ η συνθήκη Runkine-Hugoniot

$$\sigma = \frac{A(u^+) - A(u^-)}{u^+ - u^-} = \frac{0^2/2 - 1^2/2}{0 - 1} = \frac{1}{2} \qquad (\Rightarrow x = \sigma t + 0)$$

δίνει τη λύση κρουστικό κύμα (ασυνεχή)

$$u_3(x,t) = \begin{cases} 0, & x < t/2 \\ 1, & x > t/2 \end{cases} .$$

Οι χαρακτηριστικές ευθείες στη περίπτωση αυτή είναι



Παρατήρηση

Υπό το πρίσμα των Παραδειγμάτων Δ6-2 και Δ6-3 συμπεραίνουμε ότι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών μπορεί να έχει περισσότερες της μιας λύσεις. Το ερώτημα είναι ποιά από αυτές είναι αποδεκτή, και μιας και προβλήματα αυτού του τύπου είναι μοντέλα φυσικών φαινομένων το ερώτημα διατυπώνεται ως εξής: ποιά από τις λύσεις είναι φυσικά αποδεκτή;
Το φυσικό μέγεθος που υπαγορεύει μία τέτοια επιλογή είναι αυτό της εντροπίας. Σύμφωνα με την αρχή αυτή η ταχύτητα του κύματος προ της θραύσης είναι μεγαλύτερη από αυτή του κύματος μετά, έτσι ώστε το κύμα πρό να προλαβαίνει αυτό μετά. Αυτό σημαίνει ότι πάνω στη καμπύλη κρούσης θα είναι

$$a(u^-) > \sigma > a(u^+). \tag{3}$$

Τη σχέση (3) θα τη λέμε **κριτήριο της εντροπίας** για τη λύση. Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται από τη λύση u_1 του Παραδείγματος Δ6-1 αλλά όχι από την u_3 του Παραδείγματος Δ6-3. Συμπερασματικά, θα έχουμε ότι κατά μήκος των καμπύλων ασυνέχειας ενός κρουστικού κύματος οι δύο συνθήκες αυτή του άλματος και η (3) ικανοποιούνται.