AM 436 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Διάλεξη 4

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

9 Οκτωβρίου 2019

Ας θεωρήσουμε το τυπικό παράδειγμα μιας μη γραμμικής εξίσωσης πρώτης τάξης δύο μεταβλητών.

Παράδειγμα (Δ4-1)

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u_t + c(u)u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

όπου $c(u)$ δοσμένη ομαλή συνάρτηση του u.

Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα έχει ομαλή C^1 λύση $u = u(x,t)$. Όπως και στη γραμμική περίπτωση οι χαρακτηριστικές δίνονται από την εξίσωση

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c(u), \qquad u = u(x,t). \tag{1}$$

Η εξίσωση (1) δεν μπορεί να λυθεί μιας και η u είναι άγνωστη. Κατά μήκος όμως κάθε χαρακτηριστικής καμπύλης γ: $x = x(t)$ υπολογίζουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(x(t),t) = u_t + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}u_x = u_t + c(u)u_x = 0. \tag{2}$$

Συνεπώς η u παραμένει σταθερή επάνω σε κάθε χαρακτηριστική καμπύλη, έτσι οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι ευθείες μιας και

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) \stackrel{(1)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(u) = 0,$$

και δίνονται από τη σχέση

$$x = c(u_0(\xi))t + \xi \tag{3}$$

ενώ η λύση της εξίσωσης είναι

$$u(x,t) = u(\xi,0) = u_0(\xi),$$

όπου το $\xi = \xi(x,t)$ δίνεται πεπλεγμένα από την (3).

Επαλήθευση: Παραγωγίζοντας την έκφραση της u παίρνουμε

$$u_t = u_0'(\xi)\xi_t, \qquad u_x = u_0'(\xi)\xi_x, \tag{4}$$

ενώ από την (3) προκύπτει ότι

$$0 = c'(u_0(\xi))u_0'(\xi)\xi_t t + c(u_0(\xi)) + \xi_t$$

οπότε

$$\xi_t(1 + c'(u_0(\xi))u_0'(\xi)t) = -c(u_0(\xi)) \tag{5}$$

$$1 = c'(u_0(\xi))u_0'(\xi)\xi_x t + \xi_x$$

έτσι

$$\xi_x(1 + c'(u_0(\xi))u_0'(\xi)t) = 1. \tag{6}$$

Θέτοντας $D = 1 + c'(u_0(\xi))u_0'(\xi)t$ και υποθέτοντας ότι $D \neq 0$ έχουμε δια μέσου των (3), (5), (6)

$$u_t = -\frac{c(u_0(\xi))u_0'(\xi)}{D}, \qquad u_x = \frac{u_0'(\xi)}{D}.$$

Κατά συνέπεια

$$u_t + c(u)u_x = -\frac{c(u_0(\xi))u_0'(\xi)}{D} + c(u_0(\xi))\frac{u_0'(\xi)}{D} = 0.$$

Έτσι μια συνθήκη για την ύπαρξη της λύσης στη c και u_0 είναι

$$1 + c'(u_0(\xi))u_0'(\xi)t \neq 0. \tag{7}$$

Παράδειγμα (Δ4-2)

Να λυθεί το μη γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$u_t + uu_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = -x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Εδώ είναι $c(u) = u$, $u_0(\xi) = -\xi$, και

$$D = 1 + c'(u_0(\xi))u_0'(\xi)t = 1 - t.$$

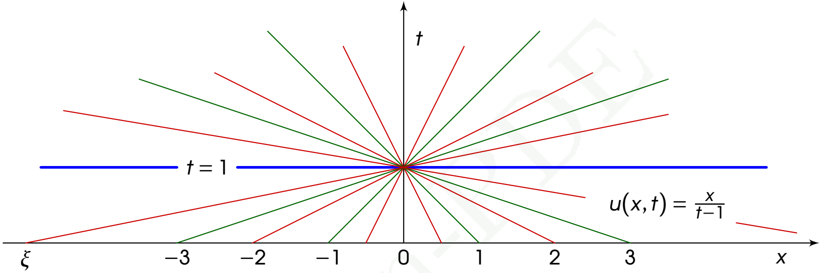
Οι δε χαρακτηριστικές είναι

$$x = c(u_0(\xi))t + \xi = -\xi t + \xi = \xi(1-t).$$

Έτσι η λύση του προβλήματος είναι

$$u(x,t) = u(\xi,0) = u_0(\xi) = -\xi = \frac{x}{t-1},$$

η οποία υπάρχει για $0 \leq t < 1$.



Οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι οι ευθείες

$$x = -\xi t + \xi = \xi(1 - t),$$

οι οποίες διέρχονται από το σημείο $(x = 0, t = 1)$. Αν $\xi \to \pm\infty$ οι ευθείες αυτές τείνουν στην $t = 1$, ενώ αν $\xi \to 0$ στην $x = 0$. Η λύση u ορίζεται παντού στην λωρίδα $0 \leq t < 1$. Επιπλέον επάνω σε κάθε χαρακτηριστική η u είναι σταθερή συνεπώς δεν μπορεί να ορισθεί και να είναι συνεχής στην $t = 1$.

Παρατήρηση

Για το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

έχουμε ότι

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$$

δηλαδή οι χαρακτηριστικές είναι ευθείες και η u είναι σταθερή κατά μήκος των χαρακτηριστικών. Έτσι θα είναι

$$x = u(x,t)t + \xi \Rightarrow \xi = x - u(x,t)t$$

επομένως

$$u(x,t) = u(\xi,0) = g(\xi) = g(x - ut),$$

δηλαδή η λύση δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή. Ας δεχτούμε ότι η λύση είναι ομαλή. Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς x παίρνουμε

$$u_x = g'(x-ut)(1-u_x t) \Rightarrow (1+g'(\xi)t)u_x = g'(\xi),$$

οπότε θα είναι

$$u_x = \frac{g'(\xi)}{1+g'(\xi)t}.$$

Κατά συνέπεια η λύση είναι ομαλή μέχρι την πρώτη χρονική στιγμή $t = t_c$ για την οποία μηδενίζεται ο παρονομαστής, δηλαδή

$$t_c = -\frac{1}{g'(\xi)}. \tag{8}$$

Αναφερόμενοι στο Παράδειγμα Δ4-2 βλέπουμε ότι $g(\xi) = -\xi$, επομένως $t_c = 1$ όπως πράγματι βρήκαμε απαιτώντας να ισχύει $D \neq 0$.

Θεωρούμε στη συνέχεια το πιο γενικό μη γραμμικό πρόβλημα

$$\begin{aligned} &u_t + c(x,t,u)u_x = f(x,t,u), && x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = u_0(x), && x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

όπου c και f είναι συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα έχει ομαλή λύση. Τότε κατά μήκος των χαρακτηριστικών

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c(x,t,u)$$

η εξίσωση ανάγεται στην

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(x,t,u).$$

Το σύστημα των δύο αυτών διαφορικών εξισώσεων το ονομάζουμε **χαρακτηριστικό σύστημα** και το λύνουμε με αρχικές συνθήκες

$$t = 0: \quad x = \xi, \quad u = u_0(\xi),$$

με ξ δηλαδή παραμετρικοποιούμε την ευθεία $t = 0$ στην οποία περιγράφονται τα αρχικά δεδομένα.

Παράδειγμα (Δ4-3)

Να λυθεί το μη γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x = -u, && x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \lambda x, && x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

όπου λ είναι μία πραγματική παράμετρος.

Το χαρακτηριστικό σύστημα είναι το

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -u$$

με αρχικά δεδομένα

$$t = 0: \quad x = \xi, \quad u = \lambda\xi.$$

Λύνοντας, λοιπόν, βρίσκουμε

$$u = \lambda\xi e^{-t}, \qquad x = \xi(-\lambda e^{-t} + 1 + \lambda),$$

απ' όπου απαλλείφοντας την παράμετρο ξ παίρνουμε τη λύση

$$u(x,t) = \frac{\lambda x e^{-t}}{1+\lambda-\lambda e^{-t}}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t>0.$$

Έτσι θα είναι

$$u(x,t) = \begin{cases} -x, & \lambda = -1 \\ \dfrac{x}{(\lambda^{-1}+1)e^{t}-1}, & \lambda \neq 0, \quad \lambda \neq -1 \\ 0, & \lambda = 0 \end{cases}$$

Για $\lambda \neq -1, 0$ η λύση είναι ομαλή αν $\lambda^{-1}+1<0$, ισοδύναμα αν $-1<\lambda<0$, ενώ για $\lambda<-1$ ή $\lambda>0$ ο παρονομαστής στην έκφραση του u μηδενίζεται όταν

$$e^{t} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \qquad (>0).$$

Κατά συνέπεια η λύση είναι ομαλή αν $-1 \leq \lambda \leq 0$, ενώ αν $\lambda<-1$, ή $\lambda>0$ η λύση είναι ομαλή για $0 \leq t < \log(\lambda^{-1}+1)$.

Σαν τυπικά παραδείγματα μη γραμμικών εξισώσεων είδαμε διάφορες παραλλαγές της εξίσωσης

$$u_t + (f(u))_x = g(u)$$

ειδικά την περίπτωση όπου $f(u) = u^2/2$. Ο λόγος είναι ότι μια εξίσωση της μορφής

$$\rho_t + q_x = 0$$

εκφράζει ένα *νόμο διατήρησης*. Θα επανέλθουμε αργότερα.

Ας δούμε όμως τώρα μια άλλου τύπου μη γραμμική εξίσωση, την εξίσωση της *εικόνας*. Η εξίσωση αυτή εμφανίζεται στη γεωμετρική οπτική.

Παράδειγμα (Δ4-4)

Να επιλυθεί η εξίσωση

$$u_x^2 + u_y^2 = n^2. \tag{9}$$

Εδώ $n = n(x, y)$ είναι ο δείκτης διάθλασης του υλικού.

Η εξίσωση μπορεί να ειδωθεί σαν

$$u_x u_x + u_y u_y = n^2$$

κατά συνέπεια, ακολουθώντας τη μέθοδο των χαρακτηριστικών, το σχετικό χαρακτηριστικό σύστημα είναι

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u_x \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u_y \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = n^2. \tag{10}$$

Επειδή u_x και u_y είναι άγνωστοι, υπολογίζουμε δια μέσου της (10)

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_x = u_{xx}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + u_{xy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u_{xx}u_x + u_{xy}u_y = \frac{1}{2}\left(u_x^2\right)_x + \frac{1}{2}\left(u_y^2\right)_x = \frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right)_x$$

Έτσι έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2}\left(n^2(x,y)\right)_x \tag{11}$$

και κατ΄ αναλογία

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2}\left(n^2(x,y)\right)_y. \tag{12}$$

Οι x και y υπολογίζονται από τις (11) και (12), ενώ από την $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = n^2$ βρίσκουμε

$$u(x(t), y(t)) = u(x(0), y(0)) + \int_0^t n^2(x(s), y(s))\,\mathrm{d}s. \tag{13}$$

Σημειώνουμε εδώ ότι για την εύρεση των χαρακτηριστικών παραγωγίζουμε τις $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ και $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, προκειμένου να χρησιμοποιηθεί η διαφορική εξίσωση. Έτσι για την επίλυσή τους στη συνέχεια θα πρέπει να γνωρίζουμε τις επιπλέον αρχικές τιμές $x'(0)$ και $y'(0)$. Σε πολλές περιπτώσεις όμως, όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί, η πληροφορία αυτή παρέχεται από την γεωμετρία του προβλήματος.

Παράδειγμα (Δ4-5)

Να λυθεί η εξίσωση της εικόνας σε υλικό με σταθερό δείκτη διάθλασης $n = n_0$

$$u_x^2 + u_y^2 = n_0^2$$

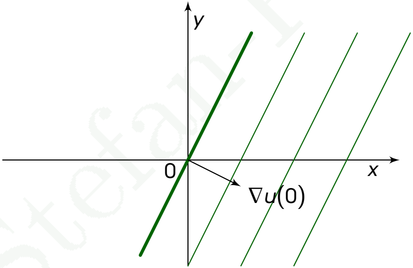
και αρχική συνθήκη $u(x, 2x) = 1$.

Από τις (11), (12) βρίσκουμε

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}n_0}{\mathrm{d}x} = 0 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}n_0}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},$$

άρα οι χαρακτηριστικές είναι ευθείες οι οποίες ξεκινούν από την $y = 2x$. Η u είναι σταθερή πάνω στην αρχική ευθεία $y = 2x$, οπότε το ∇u για $t = 0$ είναι ορθογώνιο στο διάνυσμα $(1,2)$, κατά συνέπεια

$$\nabla u(0) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) n_0.$$



Έτσι θα είναι

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{2}{\sqrt{5}} n_0 \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = -\frac{1}{\sqrt{5}} n_0.$$

Υπό το πρίσμα των αρχικών συνθηκών (αρχική καμπύλη)

$$t = 0 : x = \xi, \quad y = 2\xi, \quad u = 1$$

οι λύσεις του χαρακτηριστικού συστήματος δίνονται από

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{5}} n_0 t + \xi, \qquad y(t) = \frac{-1}{\sqrt{5}} n_0 t + 2\xi, \qquad u(t) = n_0^2 t + u_0,$$

απ΄ όπου έπεται ότι

$$t = \frac{2x - y}{n_0 \sqrt{5}}, \qquad u(x, y) = 1 + \frac{n_0}{\sqrt{5}}(2x - y).$$

Η φυσική σημασία του αποτελέσματος είναι ότι σε ένα ομοιογενές υλικό οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι ευθείες (κλασσικές ακτίνες φωτός) και ένα αρχικό επίπεδο φωτεινό κύμα διαδίδεται σε κατεύθυνση κάθετη σε αυτές.

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια δύο περιπτώσεις όπου η λύση ενός προβλήματος αρχικών τιμών, λόγω μη συνεχούς αρχικής κατάστασης αυτή τη φορά και σε αντιπαραβολή με τα Παραδείγματα Δ4-2 και Δ4-3, είναι ασυνεχής.

Παράδειγμα (Δ4-6)

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών για την **εξίσωση μεταφοράς**

$$\begin{aligned} &u_t + cu_x = 0, && x \in \mathbb{R}, \quad t > 1 \\ &u(x,0) = u_0(x), && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

όπου c είναι μία θετική σταθερά και

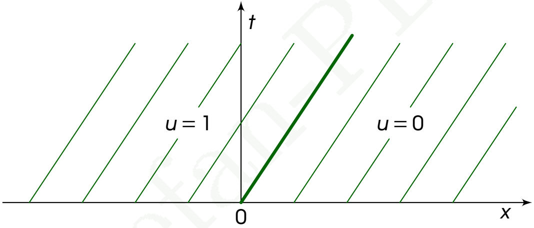
$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}.$$

Όπως δείξαμε (2η Διάλεξη) η λύση του προβλήματος δίνεται από τη σχέση

$$u(x,t) = u_0(x-ct),$$

κατά συνέπεια η λύση είναι η

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < ct \\ 0, & x > ct \end{cases} .$$



Οι χαρακτηριστικές είναι οι ευθείες

$$x = ct + \xi, \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

και καλύπτουν το ολόκληρο το ημιεπίπεδο $t \geq 0$, και η ασυνέχεια στο $x = 0$, $t = 0$ μεταδίδεται κατά μήκος της χαρακτηριστικής $x = ct$.

Παράδειγμα (Δ4-7)

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών για την **εξίσωση του Burgers**

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x = 0, && x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = u_0(x), && x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

όπου

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}.$$

Το χαρακτηριστικό σύστημα είναι το

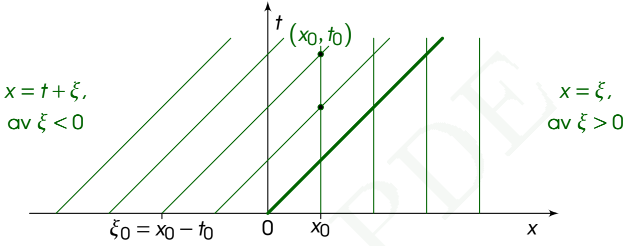
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$$

με αρχικά δεδομένα

$$t = 0: \quad x = \xi, \quad u = u_0(\xi).$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η λύση u είναι σταθερή κατά μήκος των χαρακτηριστικών

$$x = u_0(\xi)t + \xi.$$



Οι χαρακτηριστικές τέμνονται στο εσωτερικό της γωνίας $0 < x < t$ και κάθε σημείο (x_0, t_0) με $0 < x_0 < t_0$, βρίσκεται επάνω σε δύο χαρακτηριστικές, τις $x - t = x_0 - t_0 = \xi_0$ με $\xi_0 < 0$ και $x = x_0$. Έτσι θα πρέπει να ισχύει $u(x_0, t_0) = u_0(\xi_0) = 1$ και $u(x_0, t_0) = u_0(x_0) = 0$. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβαίνει. Ένας τρόπος επίλυσης του προβλήματος είναι να επιλέξουμε μία ημιευθεία $x = mt$ με $0 < m < 1$ και να ορίσουμε τη λύση όπως στο Παράδειγμα 6

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < mt \\ 0, & x > mt \end{cases}$$

και η ασυνέχεια στο $x = 0$ μεταδίδεται κατά μήκος της χαρακτηριστικής $x = mt$. Θα δείξουμε παρακάτω πως μπορούμε να ορίσουμε μιά τέτοια λογική λύση.