AM 436 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Διάλεξη 3

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

7 Οκτωβρίου 2019

Στην προηγούμενη διάλεξη θεωρήσαμε την **εξίσωση μεταφοράς**

$$u_t(x,t) + cu_x(x,t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

όπου c είναι μια πραγματική μη μηδενική σταθερά την οποία επιλύσαμε με δύο τρόπους: 1ο με τη **γεωμετρική μέθοδο** και 2ο με την **μέθοδο των χαρακτηριστικών**.

Ας θεωρήσουμε τώρα την εξίσωση

$$u_t(x,t) + c(x,t)u_x(x,t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{1}$$

όπου ο συντελεστής c είναι συνάρτηση των μεταβλητών x και t. Και πάλι η ποσότητα $u_t + c(x,t)u_x$ είναι η παράγωγος της u κατά μήκος της καμπύλης γ που ορίζεται από τη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c(x,t).$$

Και σε αυτή την περίπτωση οι παραπάνω καμπύλες λέγονται **χαρακτηριστικές καμπύλες**.

Παράδειγμα

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u_t - 2xtu_x = 0, && x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = u_0(x), && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Οι χαρακτηριστικές δίνονται από την εξίσωση

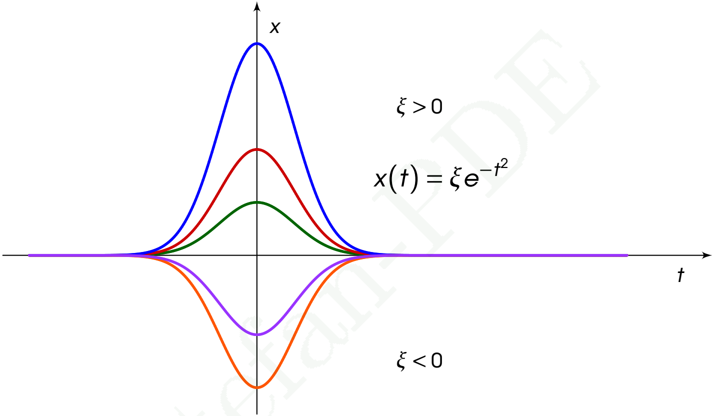
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2xt \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int 2t\,\mathrm{d}t \Rightarrow x = \xi e^{-t^2}, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

ενώ πάνω σε κάθε χαρακτηριστική καμπύλη η u είναι τέτοια ώστε

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0,$$

παραμένει δηλαδή σταθερή, επομένως

$$u(x,t) \overset{t=0}{=} u(\xi,0) = u_0(\xi) = u_0(xe^{t^2}).$$



Οι χαρακτηριστικές καμπύλες $x = \xi e^{-t^2}$ καλύπτουν το ημιεπίδεδο $t \geq 0$. Για κάθε σημείο (x_0, t_0) με $t_0 > 0$ υπάρχει μοναδική χαρακτηριστική καμπύλη η οποία το περιέχει. Είναι η

$$x(t) = x_0 e^{t_0^2} e^{-t^2}, \qquad \xi = x_0 e^{t_0^2}.$$

Η γενική γραμμική εξίσωση 1ης τάξης στις δύο μεταβλητές είναι

$$a(x,t)u_x(x,t)+b(x,t)u_t(x,t)=c(x,t)u(x,t)+g(x,t), \qquad x\in\mathbb{R}, \quad t>0. \tag{2}$$

Θέλουμε να δούμε το αριστερό μέλος της (2) σαν την παράγωγο της u επάνω σε μια καμπύλη γ στο xt επίπεδο. Θεωρούμε λοιπόν μια

$$\gamma=(x,t): \quad x=x(s), \quad t=t(s), \tag{3}$$

όπου s μια πραγματική παράμετρος και στη συνέχεια υπολογίζουμε το ρυθμό μεταβολής της u κατά μήκος της γ

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u(x(s),t(s))=u_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+u_t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}. \tag{4}$$

Επιλέγοντας λοιπόν σαν καμπύλη γ εκείνη που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=a(x,t) \quad (x'(s)=a(s)), \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=b(x,t) \quad (y'(s)=b(s)) \tag{5}$$

έχουμε ότι το αριστερό μέλος της (2) είναι η παράγωγος της u κατά μήκος της γ επομένως η (2) γράφεται

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=c(x,t)u(x,t)+g(x,t) \quad (u'(s)=c(s)u+g(s)). \tag{6}$$

Κατά συνέπεια η επίλυση της (2) ανάγεται στην επίλυση των (5) και (6). Οι καμπύλες (3) που ικανοποιούν τις (5) είναι οι **χαρακτηριστικές καμπύλες** της εξίσωσης.

Παράδειγμα

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} xu_x + tu_t &= \lambda u, && x \in \mathbb{R}, \quad t > 1 \\ u(x,1) &= f(x), && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Οι χαρακτηριστικές εξισώσεις (5) γίνονται

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = x, \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = t,$$

ενώ πάνω σε κάθε χαρακτηριστική καμπύλη $\gamma(s) = (x(s), t(s))$ η u εξελίσσεται σύμφωνα με τον νόμο

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \lambda u.$$

Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε

$$x(s) = Ae^s, \qquad t(s) = Be^s, \qquad u(s) = u(x(s), t(s)) = Ce^{\lambda s}.$$

Από τα αρχικά δεδομένα προκύπτει ότι

$$x(0) = \xi, \qquad t(0) = 1, \qquad u(0) = u(x(0), t(0)) = u(\xi, 1) = f(\xi).$$

Έτσι θα είναι

$$x(s) = \xi e^s, \qquad t(s) = e^s, \qquad u(s) = u(x(s), t(s)) = f(\xi)e^{\lambda s}.$$

Απαλλείφοντας την παράμετρο s έχουμε ότι

$$x = \xi t, \qquad s = \ln t, \qquad u = f(\xi)t^{\lambda}$$

οπότε η λύση του προβλήματος είναι η

$$u(x,t) = f\left(\frac{x}{t}\right)e^{\lambda \ln t} = f\left(\frac{x}{t}\right)t^{\lambda}.$$

Σημειώνουμε ότι οι χαρακτηριστικές είναι όλες οι ευθείες $x = \xi t$, $t \geq 1$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα ($u = u(x,y,t)$)

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} tu_t + xu_x + yu_y &= 1, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 1 \\ u(x,y,1) &= \sin(xy), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Οι χαρακτηριστικές δίνονται από τις εξισώσεις

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = t, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = x, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = y$$

ενώ πάνω σε κάθε χαρακτηριστική καμπύλη έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = 1.$$

Λύνοντας τις εξισώσεις αυτές παίρνουμε

$$t(s) = c_1 e^s, \qquad x(s) = c_2 e^s, \qquad y(s) = c_3 e^s, \qquad u = s + c, \tag{7}$$

όπου c_1, c_2, c_3, c είναι σταθερές. Τα αρχικά δεδομένα ($s = 0$) περιγράφουν (παραμετρικά) το επίπεδο

$$t = 1, \qquad x = \xi_1, \qquad y = \xi_2, \qquad (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{8}$$

και πάνω στην αρχική επιφάνεια

$$u(\xi_1, \xi_2, 1) = \sin(\xi_1 \xi_2). \tag{9}$$

Από τις (7) και (8) έπεται ότι

$$t = e^s, \qquad x = \xi_1 e^s, \qquad y = \xi_2 e^s, \tag{10}$$

και από τις (7) και (9) ότι

$$u(\xi_1, \xi_2, 1) = \sin(\xi_1 \xi_2) = c. \tag{11}$$

Ένεκα των

$$s = \ln t, \qquad x = \xi_1 t, \qquad y = \xi_2 t,$$

τελικά, δια μέσου των (10) και (11) έχουμε

$$u(x, y, t) = s + \sin(\xi_1 \xi_2) = \ln t + \sin\left(\frac{xy}{t^2}\right).$$

Άσκηση 1. Να λυθεί η εξίσωση

$$au_t(x,t)+bu_x(x,t)=0, \qquad x\in\mathbb{R}, \quad t>0,$$

όπου a και b είναι πραγματικές σταθερές με $a^2+b^2\neq 0$.

Λύση

3ος τρόπος επίλυσης: Η μέθοδος των συντεταγμένων. Ορίζουμε τις συντεταγμένες ξ και η με τις σχέσεις

$$\xi = bx+at, \qquad \eta = ax-bt$$

και ορίζουμε $U(\xi,\eta)=u(x,t)$. Έτσι από τον κανόνα της αλυσίδας υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} u_t &= U_\xi \xi_t + U_\eta \eta_t = aU_\xi - bU_\eta \\ u_x &= U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = bU_\xi + aU_\eta. \end{aligned}$$

Από την αρχική εξίσωση παίρνουμε

$$0 = au_t+bu_x = a^2U_\xi - abU_\eta + b^2U_\xi + abU_\eta = (a^2+b^2)U_\xi.$$

Ισοδύναμα

$$U_\xi = 0 \Rightarrow U(\xi,\eta) = \phi(\eta),$$

όπου ϕ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση, κατά συνέπεια από τον ορισμό των ξ, η και U βρίσκουμε τελικά ότι

$$u(x,t) = \phi(ax - bt).$$

Σημειώνουμε ότι διαιρώντας την αρχική εξίσωση με $a^2 + b^2$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a^2 + b^2 = 1$, επομένως υπάρχει θ ώστε $b = \cos\theta$ και $a = \sin\theta$, έτσι

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b & a\\ a & -b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ t\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

και το μητρώο του μετασχηματισμού των συντεταγμενων $(x,t) \to (\xi,\eta)$ είναι ορθογώνιο.