Πανεπιστημιο Πατρων – Τμημα Μαθηματικων

AM436 ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2η Διάλεξη 2 Οκτωβρίου 2019

Συμπλήρωμα

Αν οι μερικές παράγωγοι μιας $u = u(x, y, z)$ υπάρχουν τότε η Λαπλασιανή της u είναι

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

έτσι στις τρεις χωρικές διαστάσεις οι τυπικές εξισώσεις γράφονται ως

1. Η εξίσωση της θερμότητας: $u_t = \Delta u, \qquad u = u(x, y, z, t).$
2. Η κυματική εξίσωση: $u_{tt} = c^2 \Delta u, \qquad u = u(x, y, z, t).$
3. Η εξίσωση του Laplace: $\Delta u = 0, \qquad u = u(x, y, z).$
4. Η εξίσωση του Schrödinger: $i\psi_t = \Delta \psi, \qquad \psi = \psi(x, y, z, t).$

Η μορφή των εξισώσεων είναι η ίδια για οποιοδήποτε πλήθος χωρικών μεταβλητών.

1. ΜΔΕ 1ης τάξης

Εισαγωγή

Οι εξισώσεις

$$u_x + u_y = 0, \qquad uu_x = f(x, y), \qquad u_x + uu_y = 0, \qquad u_x^2 + u_y^2 = f(x, y),$$

είναι παραδείγματα μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης δύο ανεξάρτητων μεταβλητών. Μια μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, στις δύο μεταβλητές, μπορεί να παρασταθεί ως

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{1}$$

όπου F είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη σε κάποιο χωρίο του $\mathbb{R}^5$. Θα περιορίσουμε τη μελέτη μας, κυρίως, στις δύο διαστάσεις και ο λόγος για την επιλογή μας αυτή είναι η γεωμετρική θεώρηση της σχέσης (1). Η $z = u(x, y)$ είναι μία επιφάνεια στο $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x, y, z) : \Phi(x, y, z) = 0\} \qquad \text{με} \qquad \Phi(x, y, z) = u(x, y) - z$$

και το κανονικό κάθετο διάνυσμα σ' αυτή είναι το $(u_x, u_y, -1)$

$$\nabla\Phi \perp S \qquad \text{και} \qquad \nabla\Phi = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z),$$

κατά συνέπεια η (1) είναι μία σχέση η οποία συνδέει την άγνωστη επιφάνεια με το κανονικό κάθετο διάνυσμά της. Η γεωμετρική αυτή προσέγγιση θα μας επιτρέψει να λύσουμε κάποιες εξισώσεις. Οπωσδήποτε οι ιδέες αυτές γενικεύονται σε περισσότερες διαστάσεις.

1.1. Γραμμικές Εξισώσεις

Η εξίσωση (1) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$L[u] = f(x, y),$$

όπου L είναι ένας διαφορικός τελεστής πρώτης τάξης. Η (1) θα λέγεται γραμμική εάν ο L είναι γραμμικός. Έτσι η εξίσωση

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0 \Leftrightarrow L[u] := \left[a(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\right]u = 0,$$

είναι γραμμική ενώ η

$$u_x + uu_y = 0$$

δεν είναι γραμμική μιας και για τον αντίστοιχο τελεστή L ισχύει (γιατί;)

$$L[u_1 + u_2] = L[u_1] + L[u_2] + \frac{\partial}{\partial y}(u_1 u_2).$$

Η απλούστερη γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης στις δύο διαστάσεις είναι η

$$u_x(x, t) = 0. \tag{2}$$

Η γενική λύση της προκύπτει με απλή ολοκλήρωση ως προς x και είναι η $u(x, t) = \phi(t)$, όπου ϕ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση του t. Όμοια η $u_t(x, t) = 0$ έχει λύση την $u(x, t) = \phi(x)$, όπου τώρα η ϕ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση του x.

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια την εξίσωση

$$au_t(x, t) + bu_x(x, t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{3}$$

όπου a και b είναι πραγματικές σταθερές. Εάν $a = 0$, ή $b = 0$, τότε αναγόμαστε στις προηγούμενες περιπτώσεις. Υποθέτοντας λοιπόν ότι $a \neq 0$ και $b \neq 0$ η εξίσωση (3) γράφεται

$$u_t(x, t) + cu_x(x, t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{4}$$

όπου c είναι μια πραγματική μη μηδενική σταθερά. Η εξίσωση (4) λέγεται **εξίσωση μεταφοράς**.

1ος τρόπος επίλυσης της (4)**: Γεωμετρική μέθοδος.** Εάν $\mathbf{c} = (c, 1)$, τότε η ποσότητα $u_t + cu_x$ στην (4) είναι η παράγωγος της u κατά την διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{c}$ μιας και

$$D_{\mathbf{c}}u = \nabla u \cdot \mathbf{c} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) \cdot (c, 1) = cu_x + u_t,$$

όπου "·" είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Κατά συνέπεια η (4) εκφράζει το γεγονός ότι ο ρυθμός μεταβολής της u κατά την διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{c}$ ισούται με μηδέν, ή ισοδύναμα ότι η u είναι σταθερή πάνω σε κάθε ευθεία στο xt επίπεδο παράλληλη του $\mathbf{c}$. Η εξίσωση μιας τέτοιας ευθείας είναι $x = ct + \xi$, $\xi \in \mathbb{R}$. Επομένως εάν $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει μοναδικό ξ ώστε $x = ct + \xi$ και

$$u(x, t) = u(\xi, 0) = \phi(\xi),$$

όπου ϕ είναι μια αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση. Η λύση συνεπώς της (4) είναι

$$u(x,t) = \phi(x - ct), \tag{5}$$

όπου ϕ είναι μια αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση.

2ος τρόπος επίλυσης της (4)**: Η μέθοδος των χαρακτηριστικών.** Εάν $\gamma : x = x(t)$ είναι μια καμπύλη στο xt επίπεδο, δηλαδή $\gamma(t) = (x(t), t)$ και $u(x,t)$ είναι μια συνάρτηση ορισμένη πάνω στην γ, τότε η παράγωγος της $u(x,t)$ κατά μήκος της γ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(x(t),t) = u_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + u_t. \tag{6}$$

Κατά συνέπεια η (4) δηλώνει ότι η $u(x,t)$ κατά μήκος της καμπύλης $\gamma : x = x(t)$ με

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c \tag{7}$$

έχει ρυθμό μεταβολής

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{8}$$

Οι λύσεις της (7) είναι όλες οι ευθείες $x = ct + \xi$, $\xi \in \mathbb{R}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν από την (8) ότι η u είναι σταθερή πάνω σε κάθε τέτοια ευθεία. Έτσι αν $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει μοναδική ευθεία με κλίση c η οποία το περιέχει, ισοδύναμα υπάρχει μοναδικό ξ ώστε $x = ct + \xi$ και

$$u(x,t) = u(\xi,0) = \phi(\xi) = \phi(x - ct).$$

Οι καμπύλες γ που ικανοποιούν την (7) λέγονται **χαρακτηριστικές καμπύλες** της εξίσωσης.

Ένα τρίτο τρόπο επίλυσης της (4) με τη **μέθοδο των συντεταγμένων** παρουσιάζουμε στις ασκήσεις.

Μία διαφορική εξίσωση $F(x,t,u_x,u_t) = 0$ με $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ με καθορισμένη συμπεριφορά της λύσης για $t = 0$, δηλαδή $u(x,0) = g(x)$, όπου η g είναι μία δοσμένη συνάρτηση αποτελεί ένα **πρόβλημα αρχικών τιμών** ή **πρόβλημα Cauchy**. Έτσι σχετικά με το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u_t + cu_x = 0, && x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = g(x), && x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{9}$$

έχοντας δείξει ότι η λύση της εξίσωσης είναι η $u(x,t) = \phi(x - ct)$, όπου η ϕ είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση και επειδή $u(x,0) = g(x)$, έπεται ότι $\phi = g$. Κατά συνέπεια η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (9) είναι η

$$u(x,t) = g(x - ct). \tag{10}$$

Από τη μορφή της λύσης έπεται ότι το αρχικό προφίλ διατηρείται και ότι απλά μετακινείται κατά μήκος του x-άξονα στη θετική κατεύθυνση με ταχύτητα c.

Ας θεωρήσουμε τώρα την εξίσωση

$$u_t(x,t) + c(x,t)u_x(x,t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{11}$$

όπου ο συντελεστής c είναι συνάρτηση των μεταβλητών x και t. Και πάλι η ποσότητα $u_t + c(x,t)u_x$ είναι η παράγωγος της u κατά μήκος της καμπύλης γ που ορίζεται από τη σχέση

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c(x,t).$$

Και σε αυτή την περίπτωση οι παραπάνω καμπύλες λέγονται **χαρακτηριστικές καμπύλες**.

Παράδειγμα 1. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u_t - 2xtu_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Οι χαρακτηριστικές δίνονται από την εξίσωση

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2xt \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int 2t\,\mathrm{d}t \Rightarrow x = \xi e^{-t^2}, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

ενώ πάνω σε κάθε χαρακτηριστική καμπύλη η u παραμένει σταθερή, επομένως

$$u(x,t) \stackrel{t=0}{=} u(\xi,0) = u_0(\xi) = u_0(xe^{t^2}).$$