AM 436 Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Διάλεξη 1

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

30 Σεπτεμβρίου 2019

$$u_t = u_{xx}, \quad u_{tt} = u_{xx}, \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Οι Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΔΕ) εμφανίζονται σε όλες σχεδόν τις επιστήμες και είναι μοντέλα τα οποία περιγράφουν την εξέλιξη διάφορων φαινομένων. Σαν τέτοιες προκύπτουν φυσιολογικά από φυσικούς νόμους.

Μαθηματικά μια ΜΔΕ είναι ένας νόμος ο οποίος συνδέει μερικές παραγώγους διάφορων τάξεων μιας άγνωστης συνάρτησης περισσοτέρων της μιας μεταβλητών. Επιδίωξή μας είναι η επίλυση, εάν αυτό είναι δυνατό, αυτής της εξίσωσης, η εύρεση δηλαδή λύσης ή λύσεων αυτής.

$$u_t + u u_x = 0, \qquad u_t = u_{xx} + f(u)$$

Τυπικά παραδείγματα Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων είναι οι

1. *Η εξίσωση της θερμότητας (ή διάχυσης)*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{ή} \qquad u_t = u_{xx}, \qquad u = u(x,t). \tag{1}$$

2. *Η κυματική εξίσωση*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{ή} \qquad u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad u = u(x,t). \tag{2}$$

3. *Η εξίσωση του Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \text{ή} \qquad u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad u = u(x,y). \tag{3}$$

4. *Η εξίσωση του Schrödinger* της Κβαντομηχανικής

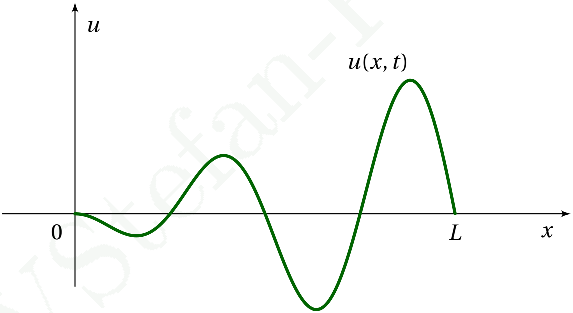
$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \qquad \text{ή} \qquad i\psi_t = \psi_{xx}, \qquad \psi = \psi(x,t), \tag{4}$$

όπου $i = \sqrt{-1}$ είναι η φανταστική μονάδα.

5. *Η εξίσωση της μεταφοράς*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \text{ή} \qquad u_t + c2u_x = 0, \qquad u = u(x,t). \tag{5}$$

Αναφέραμε ότι οι ΜΔΕ προκύπτουν από φυσικούς νόμους. Ας δούμε για παράδειγμα πως προκύπτει η κυματική εξίσωση. Μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε την κίνηση μιας ταλαντευόμενης χορδής. Τα δυο άκρα μιας χορδής μήκους L είναι στερεομένα σε δυο σημεία ενός άξονα, ας πούμε του x-άξονα. Απομακρύνοντας τη χορδή από τη θέση ισορροπίας την αφήνουμε να κινηθεί. Η $u = u(x,t)$ δίνει τη θέση του σημείου x, της χορδής, τη χρονική στιγμή t.

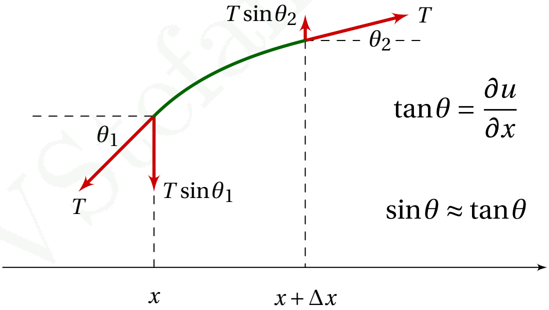


Σχήμα: Το προφίλ της $u(x,\cdot)$ τη χρονική στιγμή t.

Για τη διαμόρφωση του νόμου που διέπει την κίνηση κάνουμε τις παραδοχές:

1. Η τάση T της χορδής είναι τόσο μεγάλη ώστε η βαρύτητα παραβλέπεται.
2. Η μάζα της χορδής είναι ομοιόμορφα κατανεμημμένη με σταθερή πυκνότητα ρ.
3. Η απομάκρυνση $u(x,t)$ είναι μικρή συγκρινόμενη με το μήκος της χορδής.

Μελετάμε την κίνηση του τμήματος μεταξύ x και $x+\Delta x$. Οι δυνάμεις οι οποίες προκαλούν την κίνηση της χορδής σύμφωνα με τις υποθέσεις μας, είναι οι κατακόρυφες συνιστώσες της τάσης στα σημεία x και Δx,



$$\tan\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sin\theta \approx \tan\theta$$

$$T \sin\theta_1 \approx T \tan\theta_1 = T u_x(x,t)$$
$$T \sin\theta_2 \approx T \tan\theta_2 = T u_x(x+\Delta x,t)$$

οπότε από τον 2ο νόμο του Newton

$$\Delta \vec{F} = m\vec{a}$$

αν $m = \rho \Delta x$ είναι η μάζα του τμήματος μεταξύ x και $x+\Delta x$, βρίσκουμε

$$T[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)] = \rho(\Delta x) u_{tt}(\bar{x},t)$$

όπου $\bar{x}$ είναι το κέντρο μάζας του τμήματος της χορδής μεταξύ x και $x+\Delta x$, απ' όπου έπεται ότι

$$\frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} = \frac{\rho}{T} u_{tt}(\bar{x},t).$$

Παίρνοντας το όριο $\Delta x \to 0$ βρίσκουμε

$$u_{xx}(x,t) = \frac{\rho}{T} u_{tt}(x,t)$$

η οποία είναι η εξίσωση (2) με $c = \sqrt{T/\rho}$.

Στη συνέχεια δείχνουμε πως μια ΜΔΕ εμφανίζεται φυσιολογικά στο περιεχόμενο της Μιγαδικής Ανάλυσης. Το αντικείμενο μελέτης της Μιγαδικής Ανάλυσης είναι οι αναλυτικές συναρτήσεις. Θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$, όπου U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, λέγεται αναλυτική στο U αν η παράγωγος $f'(z)$ υπάρχει για κάθε $z \in U$. Αν

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y), \qquad z = x + i\,y$$

και η f είναι αναλυτική στο U τότε το πραγματικό μέρος u και το φανταστικό μέρος v της f ικανοποιούν τις *εξισώσεις Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{6}$$

στο U. Έτσι οι u και v είναι λύσεις ενός συστήματος ΜΔΕ 1ης τάξης. Επειδή μια αναλυτική συνάρτηση έχει παραγώγους όλων των τάξεων παραγωγίζοντας στην (6) ως προς x και ως προς y βρίσκουμε ότι επιπλέον οι u και v ικανοποιούν την εξίσωση του Laplace, δηλαδή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Έτσι τα πραγματικά και φανταστικά μέρη αναλυτικής συνάρτησης είναι αρμονικές συναρτήσεις, όπως ονομάζονται οι συνεχείς λύσεις της εξίσωσης του Laplace, και η καθεμιά από τις u και v λέγεται *αρμονική συζυγής* της άλλης.

Άσκηση

Από τη Μιγαδική Ανάλυση γνωρίζουμε ότι αν οι μερικές παράγωγοι των u και v υπάρχουν σε κάθε σημείο ενός ανοικτού συνόλου U και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann τότε η $f = u + iv$ είναι αναλυτική στο U (Θεώρημα Looman-Menchoff). Αν $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, δείξτε ότι η u είναι αρμονική συνάρτηση, δηλαδή είναι συνεχής και ικανοποιεί την εξίσωση (3). Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε τις εξισώσεις Cauchy-Riemann (6) για να βρήτε μια $v = v(x, y)$ ώστε η $f = u + iv$ να είναι αναλυτική συνάρτηση. Αναγνωρίζετε την $f = f(z)$;

■ Αν η υψηλότερης τάξης μερική παράγωγος που εμφανίζεται σε μια εξίσωση είναι η n-οστή, με $n \geq 1$, τότε η εξίσωση λέγεται τάξης n. Για παράδειγμα οι εξισώσεις (1) – (4) είναι εξισώσεις 2ης τάξης, ενώ η εξίσωση (5) είναι 1ης τάξης.

■ Μια ΜΔΕ μπορεί να γραφεί στη μορφή $L[u] = f$, όπου L είναι ένας διαφορικός τελεστής και f μια συνάρτηση. Για παράδειγμα για την εξίσωση (1) της θερμότητας έχουμε

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

έτσι ώστε η $L[u] = 0$ είναι η (1), ενώ η εξίσωση (4) του Schrödinger γράφεται $L[u] = 0$, με

$$L = i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Ειδικά η εξίσωση του Laplace γράφεται ως $\Delta u = 0$, όπου

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

είναι *ο τελεστής του Laplace*, ή *η Λαπλασιανή*. Εάν ο τελεστής L είναι γραμμικός, δηλαδή για σταθερές a, b και συναρτήσεις u, v ισχύει

$$L[au + bv] = aL[u] + bL[v]$$

η εξίσωση λέγεται γραμμική, διαφορετικά θα λέγεται μη γραμμική.

Οι εξισώσεις (1) – (5) είναι γραμμικές εξισώσεις. Παραδείγματα μη γραμμικών εξισώσεων είναι οι

1. *Η κυματική εξίσωση με διασπορά,* $u = u(x,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \qquad \text{ή} \qquad u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{7}$$

2. *Η μη γραμμική εξίσωση του Schrödinger,* $\psi = \psi(x,t)$.

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + |\psi|^2\psi, \qquad \text{ή} \qquad i\psi_t = \psi_{xx} + |\psi|^2\psi. \tag{8}$$

3. *Η εξίσωση του Burgers,* $u = u(x,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \text{ή} \qquad u_t + uu_x = 0. \tag{9}$$

4. *Η εξίσωση της εικόνας,* $u = u(x,y)$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1, \qquad \text{ή} \qquad (u_x)^2 + (u_y)^2 = 1. \tag{10}$$

Αν οι δεύτερες μερικές παράγωγοι μιας $u = u(x, y, z)$ υπάρχουν τότε η Λαπλασιανή της u είναι

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

έτσι στις τρεις χωρικές διαστάσεις οι τυπικές εξισώσεις γράφονται ως

1. Η εξίσωση του Laplace:

$$\Delta u = 0, \qquad u = u(x, y, z).$$

2. Η εξίσωση της θερμότητας:

$$u_t = \Delta u, \qquad u = u(x, y, z, t).$$

3. Η κυματική εξίσωση:

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \qquad u = u(x, y, z, t).$$

4. Η εξίσωση του Schrödinger:

$$i\psi_t = \Delta \psi, \qquad \psi = \psi(x, y, z, t).$$

Η μορφή των εξισώσεων είναι η ίδια για οποιοδήποτε πλήθος χωρικών μεταβλητών, δηλαδή στο $\mathbb{R}^n$ η (1), ή στο $\mathbb{R}^{n+1}$ οι $(2) - (4)$.

I. Ενότητες (αισιόδοξο σενάριο)

(Α΄) ΜΔΕ πρώτης τάξης

1. Γραμμικές εξισώσεις.
2. Μέθοδοι επίλυσης.
3. Μη γραμμικές εξισώσεις.
4. Μη συνεχείς λύσεις, κρουστικά κύματα, αραιωτικά κύματα.

(Β΄) ΜΔΕ δεύτερης τάξης

1. Ταξινόμηση γραμμικών εξισώσεων 2ης τάξης.
2. Η κυματική εξίσωση στην ευθεία.
3. Χωρισμός μεταβλητών για τις εξισώσεις της θερμότητας, του κύματος και του Laplace.
4. Σειρές Fourier και προβλήματα Sturm-Liouville.
5. Η μέθοδος της ενέργειας για την κυματική εξίσωση και την εξίσωση της θερμότητας.
6. Η αρχή του μεγίστου για την εξίσωση της θερμότητας και την εξίσωση του Laplace.
7. Θεμελιώδεις λύσεις, Συναρτήσεις του Green.

II. Συγγράμματα

1. Γ. Δ. Ακρίβης, Ν. Δ. Αλικάκος: *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, 2η έκδοση, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα 2017.
2. Σ. Τραχανάς: *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, ΙΤΕ – Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2009.
3. Δ. Τσουμπελής: *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Τόμος Α, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα 2009.
4. J. D. Logan: *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, μετάφραση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2002.
5. W. A. Strauss: *Partial Differential Equations, An Introduction*, 2nd edition, J. Wiley, New York, 2008.
6. H. F. Weinberger: *A first Course in Partial Differential Equations, with Complex Variables and Transform Methods*, Dover, New York, 1995.