Εισαγωγή στη Άλγεβρα και Θεωρία Συνόλων

Εξέταση 01-2-2018

Θέμα 1ο.
Έστω $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$. Ορίζουμε στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ σχέση $\sim$ ως εξής : $(a, b) \sim (c, d)$ αν $a + d = b + c$.
A. Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
B. Δείξτε ότι η απεικόνιση ϕ από το σύνολο πηλίκο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ στο σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ που στέλνει την κλάση ισοδυνανίας $[(a, b)]$ στον ακέραιο $a - b$ είναι καλά ορισμένη, 1-1 και επί.

Θέμα 2ο.
A. Να βρεθούν τα παρακάτω σύνολα $\cap_{n=1}^{\infty}(0, \frac{1}{n})$, $\cap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $\cup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n})$. Αιτιολογείστε την απάντησή σας.
B. Έστω $f : [0, 2\pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = sin(x)$. Να βρεθούν τα σύνολα

$$f([\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]), \;\; f^{-1}([0, \frac{\sqrt{3}}{2}]), \;\; f^{-1}(\{\frac{\sqrt{2}}{2}\}).$$

Θέμα 3ο.
A. Να βρεθούν τα $x \in \mathbb{Z}$ που ικανοποιούν την εξίσωση $2[x] + [4] = [0]$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_8$. Ποιες από τις κλάσεις $[0], [1], ..., [7]$ ικανοποιούν την προηγούμενη εξίσωση;
B. Βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $2018 \cdot 3^{2018}$

Θέμα 4ο.
A. Από τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν την ισότητα $|z - 2 + 2i| = 1$ να βρεθούν εκείνοι με το ελάχιστο και μέγιστο μήκος.
B. Να γραφεί στην μορφή $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ ο μιγαδικός $z = (2 - 2\sqrt{3}i)^{100}$.

Θέμα 5ο.
A. Έστω $f(x)$ πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές και ρίζα τον αριθμό $a + \sqrt{b}$ όπου $a, b \in \mathbb{Q}$, $b > 0$, $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ($\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών). Δείξτε οτι το $f(x)$ έχει ρίζα και τον $a - \sqrt{b}$.
B. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10$ έχει ρίζα το $1 - i$. Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση $f(x) = 0$.

Όλα τα θέματα και όλα τα υποερωτήματα είναι ισοδύναμα.

Καλή επιτυχία