Εισαγωγή στην άλγεβρα και την Θεωρία Συνόλων

3-09-2018

ΘΕΜΑ 1ο:

(α) Δώστε τον ορισμό του άπειρου αριθμήσιμου συνόλου. Αποδείξτε με βάση τον ορισμό αυτό ότι το σύνολο $\mathbb{N} \cup \{\sqrt{2}\}$ είναι άπειρο αριθμήσιμο, όπου $\mathbb{N}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών.

(β) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ ορίζουμε σχέση $\sim$ ως εξής $a \sim b \Leftrightarrow a - b =$ακέραιος. Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Q}$ και υπολογίστε τις κλάσεις ισοδυναμίας των στοιχείων 0 και $\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 2ο:

(α) Έστω X μη κενό σύνολο και $P(X)$ το δυναμοσύνολό του. Δείξτε ότι η πράξη της ένωσης $\cup$ στο $P(X)$ είναι αντιμεταθετική, προσεταιριστική με ουδέτερο στοιχείο. Είναι η δομη $(P(X), \cup)$ ομάδα;

(β) Έστω G πολλαπλασιαστική ομάδα και $a \in G$ στοιχείο τάξης m. Έστω n φυσικός αριθμός. Δείξτε ότι $a^n = 1$ αν και μόνο αν $m \mid n$.

ΘΕΜΑ 3ο:

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

(β) Να βρεθούν ακέραιοι x, y ώστε $(99, 111) = 99x + 111y$ όπου $(99, 111)$ είναι ο ΜΚΔ των 99 και 111.

ΘΕΜΑ 4ο:

(α) Να βρεθεί το σύνολο των μιγαδικών z που ικανοποιούν την ισότητα $Arg(2z+i) = \frac{\pi}{4}$

(β) Έστω Ω το σύνολο των μιγαδικών z που ικανοποιούν την ισότητα $|z-1-i| = 1$. Ποιοί μιγαδικοί στο Ω έχουν το μικρότερο και μεγαλύτερο όρισμα; Ποιοί έχουν το μικρότερο και μεγαλύτερο μήκος;

ΘΕΜΑ 5ο:

(α) Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $2z^3 + z^2 + z - 1 = 0$.

(β) Έστω $f(x)$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Δείξτε ότι

$$f(x) = (x - \rho_1)...(x - \rho_\nu)\phi_1(x)...\phi_k(x)$$

όπου $\rho_1, ..., \rho_\nu \in \mathbb{R}$ και $\phi_i, i = 1, ..., k$ πραγματικά πολυώνυμα δευτέρου βαθμού με αρνητική διακρίνουσα.

Καλή επιτυχία