# Κυματική: Μηχανικά και Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

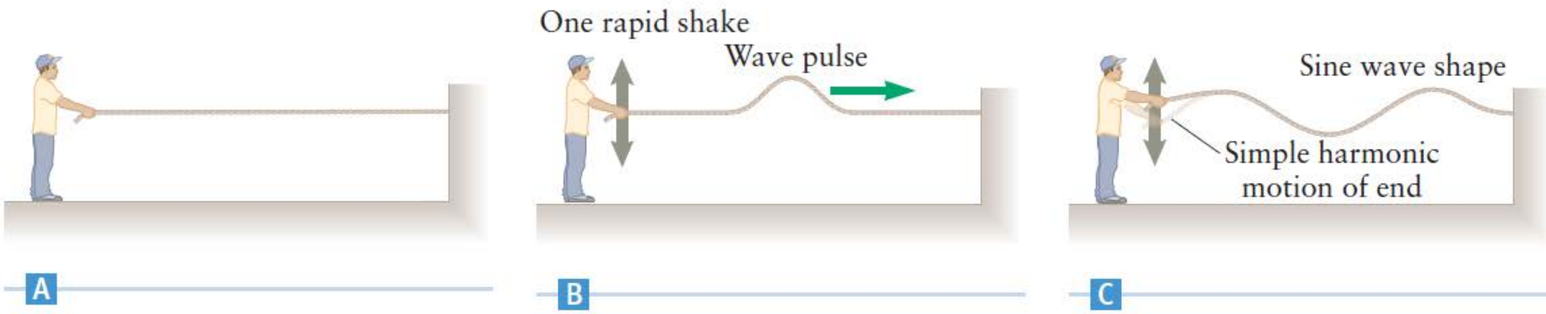
Μάθημα: Φυσική

Ακαδ. Έτος 2023-24

Διδάσκων: Ε. Πασπαλάκης

# Κύμα

- Στη φυσική, ένα κύμα είναι μια διαταραχή που μεταφέρει ενέργεια μέσω ύλης ή χώρου, με ελάχιστη ή καθόλου σχετική μεταφορά μάζας.
- Τα κύματα αποτελούνται από ταλαντώσεις ή δονήσεις ενός φυσικού μέσου ή ενός πεδίου γύρω από σχετικά σταθερές θέσεις.
- Υπάρχουν δύο κύριοι τύποι κυμάτων: τα μηχανικά κύματα και τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα.



# Μηχανικά και ηλεκτρομαγνητικά κύματα

- Τα μηχανικά κύματα διαδίδονται μέσω μιας φυσικής ύλης, της οποίας η ουσία παραμορφώνεται. Δυνάμεις επαναφοράς στη συνέχεια αντιστρέφουν την παραμόρφωση.
- Για παράδειγμα, τα ηχητικά κύματα διαδίδονται μέσω των μορίων του αέρα που συγκρούονται με τα γειτονικά μόρια αναγκάζοντάς τα να έλθουν εκτός θέσης ισορροπίας. Με αυτό τον τρόπο η διαταραχή ταξιδεύει στο μέσο.
- Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δεν απαιτούν μέσο. Αντιθέτως, αποτελούνται από περιοδικές ταλαντώσεις ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων που δημιουργούνται αρχικά από φορτισμένα σωματίδια και μπορούν να ταξιδεύουν στο κενό.

# Κυματική εξίσωση

- Η μορφή της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης είναι

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$y(x,t)$ Κυματική συνάρτηση

$\upsilon$ Ταχύτητα διάδοσης

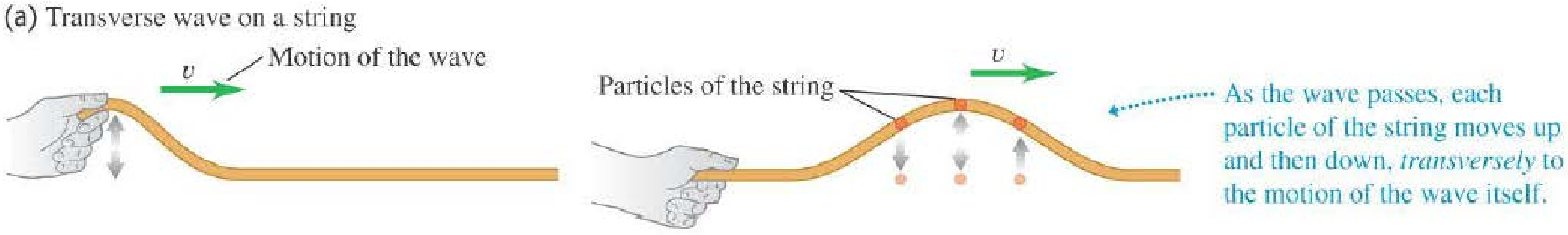
# Οδεύοντα κύματα

- Μια λύση της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση της μορφής ***f*(*x*-*υt*)** η οποία είναι διπλά παραγωγίσιμη.
- Μια συνάρτηση της μορφής αυτής περιγράφει ένα κύμα που διαδίδεται με αναλλοίωτο σχήμα με σταθερή ταχύτητα *υ* κατά τη θετική διεύθυνση του άξονα *x*.
- Βέβαια και μια συνάρτηση της μορφής ***g*(*x*+*υt*)** η οποία είναι διπλά παραγωγίσιμη είναι λύση της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης και περιγράφει ένα κύμα που διαδίδεται με αναλλοίωτο σχήμα με σταθερή ταχύτητα *υ* κατά την αρνητική διεύθυνση του άξονα *x*.
- Η γενική λύση γράφεται ως υπέρθεση των *f*, *g*

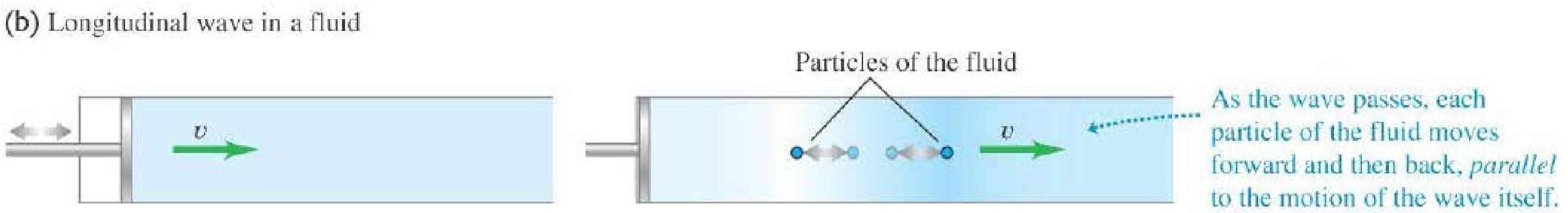
$$y(x,t) = f(x-\upsilon t) + g(x+\upsilon t)$$

# Παραδείγματα

- Εγκάρσιο οδεύον κύμα σε χορδή




- Διαμήκες κύμα σε υγρό



# Παράδειγμα 1

I. Βρείτε ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι λύσεις της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης (με $A, u$ θετικές σταθερές):

(α) $y(x,t) = A(x^2 + ut^2)$,

(β) $y(x,t) = A(x^2 - ut^2)$,

II. Στη συνέχεια γράψτε τις όποιες λύσεις της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης του ερωτήματος I στη μορφή $y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ και καθορίστε τις συναρτησιακές μορφές των $f, g$ και τις ταχύτητες φάσης.

# Παράδειγμα 1: Λύση

Η κυματική εξίσωση είναι της μορφής

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

I. Σε κάθε περίπτωση γίνεται αντικατάσταση της $y(x,t)$ στην κυματική εξίσωση (1).

(α) $y(x,t) = A(x^2 + ut^2)$

Είναι $\frac{\partial y}{\partial x} = 2Ax$ και άρα $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2A$. Ομοίως $\frac{\partial y}{\partial t} = 2Aut$ και άρα $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 2Au$. Οπότε η $y(x,t)$ είναι λύση της κυματικής εξίσωσης (1) αν $v = \sqrt{u}$ η ταχύτητα φάσης.

(β) $y(x,t) = A(x^2 - ut^2)$

Είναι $\frac{\partial y}{\partial x} = 2Ax$ και άρα $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2A$. Ομοίως $\frac{\partial y}{\partial t} = -2Aut$ και άρα $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -2Au$ οπότε με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε:

$2A + \frac{2Au}{v^2} = 0$ ή $\left(1 + \frac{u}{v^2}\right) = 0$ που είναι αδύνατον γιατί $u > 0$.

Άρα η $y(x,t)$ **δεν** αποτελεί λύση της κυματικής εξίσωσης (1).

# Παράδειγμα 1: Λύση

ΙΙ. Στην περίπτωση (α) η $y(x,t)$ γίνεται $y(x,t) = A(x^2 + v^2t^2 + xvt - xvt) =$

$$\frac{2A}{2}(x^2 + v^2t^2 + xvt - xvt) = \frac{A}{2}(x^2 + v^2t^2 + 2xvt) + \frac{A}{2}(x^2 + v^2t^2 - 2xvt)$$

και άρα

$y(x,t) = \frac{A}{2}(x + vt)^2 + \frac{A}{2}(x - vt)^2$ ή $y(x,t) = g(x + vt) + f(x - vt)$

Όπου $f(x - vt) = \frac{A}{2}(x - vt)^2$, $g(x + vt) = \frac{A}{2}(x + vt)^2$ και $v = \sqrt{u}$ η ταχύτητα φάσης.

# Αρμονικά κύματα

- Ένα κύμα που έχει ημιτονοειδή μορφή ονομάζεται αρμονικό κύμα.
- Γενική μορφή αρμονικού (ημιτονοειδούς) κύματος

$$y(x,t) = A\sin(kx \pm \omega t + \varphi)$$

– θετική $x$ διεύθυνση, + αρνητική $x$ διεύθυνση

$A$ πλάτος του κύματος

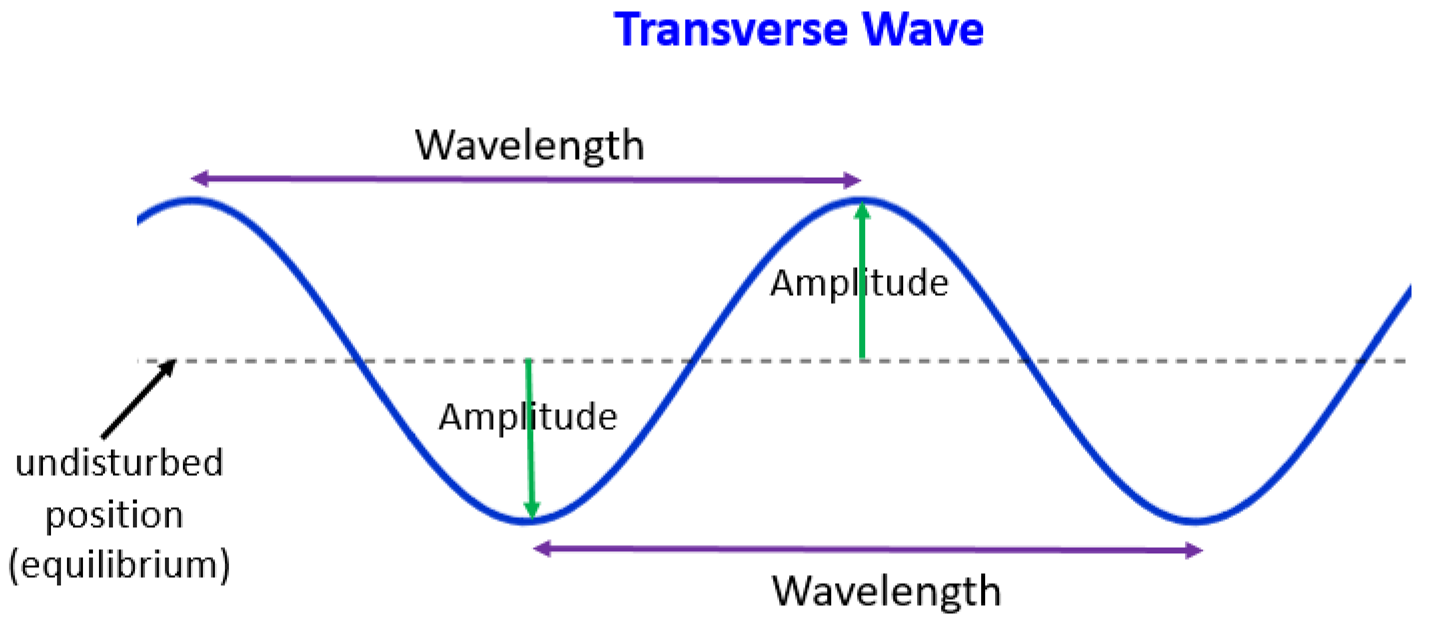
$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, κυματάριθμος, $\lambda$ μήκος κύματος

$\omega = 2\pi f$, κυκλική συχνότητα, $f$ συχνότητα

$\varphi$, φάση του κύματος

$\upsilon = \dfrac{\omega}{k} = f\lambda$, ταχύτητα (φάσης) του κύματος

# Σχεδιάγραμμα αρμονικού κύματος




**Amplitude**: maximum displacement of a point on a wave away from its undisturbed position

**Wavelength**: distance from a point on one wave to the equivalent point on the adjacent wave.

# Παράδειγμα 2

Ένα εγκάρσιο αρμονικό (ημιτονοειδές) κύμα, που ταξιδεύει σε μία τεντωμένη χορδή κατά τη θετική $x$ διεύθυνση, έχει κυματάριθμο 3 $m^{-1}$ και γωνιακή συχνότητα 20 rad/s. Εάν το πλάτος του είναι 0.2 m και το κύμα παρουσιάζει μέγιστη απομάκρυνση για $x$=0, $t$=0, να βρεθεί η κυματική συνάρτηση.

# Παράδειγμα 2: Λύση

Η γενική μορφή αρμονικού κύματος που ταξιδεύει σε τεντωμένη χορδή κατά τη θετική $x$ διεύθυνση είναι

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi) \qquad (1)$$

Το πλάτος είναι $A = 0.2\,m$, $k = 3m^{-1}$ και $\omega = 20\,rad/s$. Μένει να υπολογίσουμε το $\varphi$. Αφού για $x = 0, t = 0$ έχουμε μέγιστη απομάκρυνση τότε

$$y(0{,}0) = A \rightarrow \sin(\varphi) = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Άρα

$$y(x,t) = 0.2\sin(3x - 20t + \pi/2) \text{ σε μονάδες του SI ή}$$

$$y(x,t) = 0.2\cos(3x - 20t)$$

# Παράδειγμα 3

Ένα εγκάρσιο αρμονικό (ημιτονοειδές) κύμα ταξιδεύει σε μία τεντωμένη χορδή κατά τη θετική $x$ διεύθυνση με ταχύτητα 10 cm/s. Το πλάτος του κύματος είναι 10 cm και το μήκος κύματος του είναι 0.5 m. Βρείτε την εγκάρσια ταχύτητα ενός σημείου P της χορδής όπου η μετατόπιση του κύματος είναι 5 cm.

# Παράδειγμα 3: Λύση

Έστω ότι η κυματική συνάρτηση είναι $y(x,t) = A\sin\left(kx - \omega t + \varphi\right)$. Το πλάτος του κύματος είναι $A = 10\,\text{cm}$. Ο κυματάριθμος είναι $k = 2\pi / \lambda = 2\pi / 0.5\ \text{m}^{-1} = 4\pi\ \text{m}^{-1}$ και η γωνιακή συχνότητα είναι $\omega = \upsilon k = 10 \times 10^{-2} \times 4\pi\ \text{rad/s} = 0.4\pi\ \text{rad/s}$. Αφού στο σημείο P της χορδής έχουμε $y(x,t) = 5\ \text{cm}$ θα έχουμε $10\sin\left(kx - \omega t + \varphi\right) = 5 \Rightarrow \sin\left(kx - \omega t + \varphi\right) = 1/2$. Οπότε $\left(kx - \omega t + \varphi\right) = \dfrac{\pi}{6}$ ή $\left(kx - \omega t + \varphi\right) = \dfrac{5\pi}{6}$.

Η εγκάρσια ταχύτητα του κύματος δίνεται την σχέση

$$u\left(x,t\right) = \frac{\partial y}{\partial t} \Rightarrow u\left(x,t\right) = -0.1\omega\cos\left(kx - \omega t + \varphi\right)\ ,\ u \to \frac{\text{m}}{\text{s}},\ x \to \text{m},\ t \to \text{s}.$$

Οπότε για $\left(kx - \omega t + \varphi\right) = \dfrac{\pi}{6}$ έχουμε $u = -0.04\pi\cos\dfrac{\pi}{6}\ \text{m/s} \Rightarrow u = -0.02\sqrt{3}\pi\ \text{m/s} \approx -0.1088\ \text{m/s}$,

ενώ για $\left(kx - \omega t + \varphi\right) = \dfrac{5\pi}{6}$ έχουμε $u = -0.04\pi\cos\dfrac{5\pi}{6}\ \text{m/s} \Rightarrow u = 0.02\sqrt{3}\pi\ \text{m/s} \approx 0.1088\ \text{m/s}$.

# Υπέρθεση αρμονικών κυμάτων – Στάσιμα κύματα

- Ας πάρουμε την υπέρθεση 2 αρμονικών κυμάτων που έχουν ίδιο πλάτος, ίδια συχνότητα, μήκος κύματος, φάση και κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις και είναι της μορφής

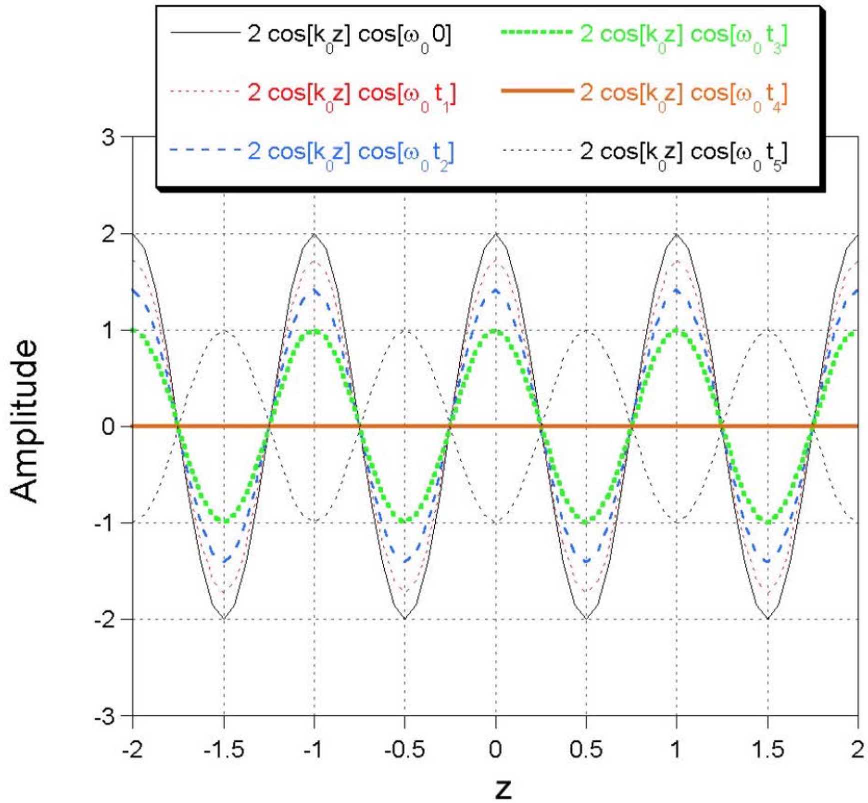
$$y_1(z,t) = A\cos(kz+\omega t),\, y_2(z,t) = A\cos(kz-\omega t)$$

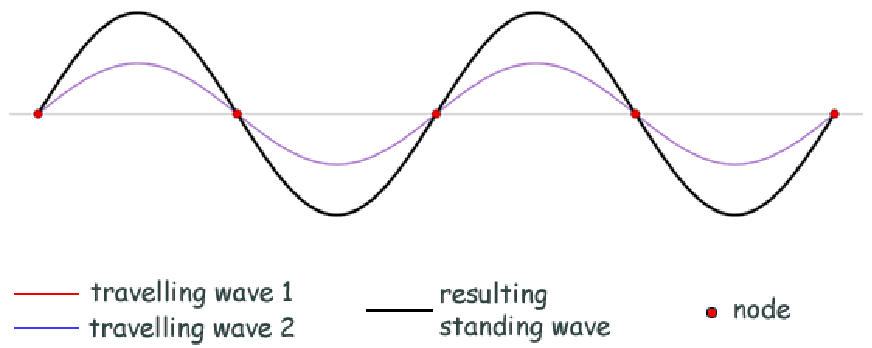
- Αφού $\cos(x+y)+\cos(x-y) = 2\cos x \cos y$

$$y_1(z,t)+y_2(z,t) = 2A\cos(kz)\cos(\omega t)$$

- Αυτό δίνει ένα στάσιμο χωρικό κύμα, με κυματάριθμο *k* που το πλάτος ταλαντώνεται με κυκλική συχνότητα *ω*.

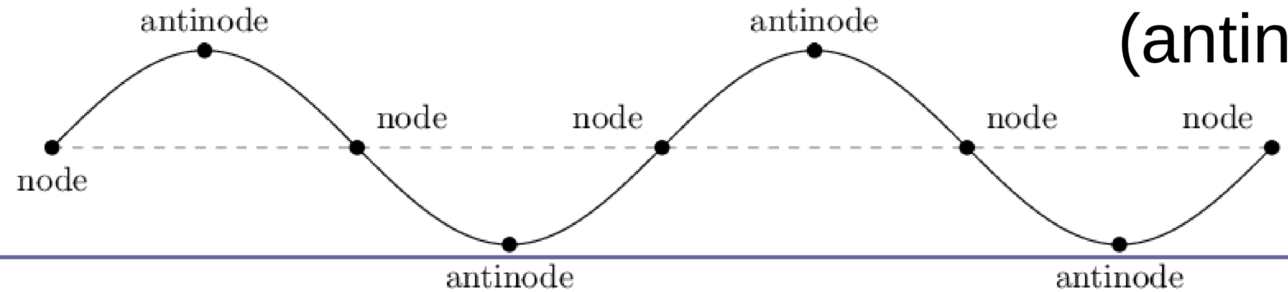
# Στάσιμα κύματα




Δεσμοί (nodes)

Κοιλίες (antinodes)



# Παράδειγμα 4

Ένα στάσιμο κύμα είναι της μορφής

$$y(x,t)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos\left(40\pi t\right),$$

όπου τα $y, x$ εκφράζονται σε mm και το $t$ σε s. Το κύμα αυτό έχει δημιουργηθεί από δύο οδεύοντα κύματα με ίδιο πλάτος, συχνότητα και μήκος κύματος, που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις.

I. Να βρεθούν το πλάτος, η συχνότητα, το μήκος κύματος και η ταχύτητα των αρχικών κυμάτων, που δημιούργησαν το στάσιμο κύμα και να γραφτεί η κυματική μορφή τους.

II. Ποια είναι η απόσταση μεταξύ των δεσμών του στάσιμου κύματος;

III. Ποια η εγκάρσια ταχύτητα του στάσιμου κύματος για $x = 1.5$ mm και $t = \frac{9}{8}$ s;

# Παράδειγμα 4: Λύση

Ι. Με την βοήθεια της τριγωνομετρικής σχέσης $2\sin a\cos b = \sin(a+b)+\sin(a-b)$, μετασχηματίζουμε την δοθείσα σχέση, οπότε έχουμε:

$$y(x,t)=\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{3}+40\pi t\right)+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi x}{3}-40\pi t\right)\ , x,y\to \mathrm{mm},\ t\to \mathrm{s}\ ,$$

με τον πρώτο όρο να περιγράφει ένα κύμα που οδεύει προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα $x$ και τον δεύτερο ένα όμοιο κύμα το οποίο διαδίδεται με την αντίθετη κατεύθυνση. Από τις σχέσεις αυτές και την γενική εξίσωση ενός αρμονικού εγκάρσιου κύματος $y(x,t)=A\sin(kx\pm\omega t+\varphi)$ έχουμε:

$$A = 0.25\ mm,\ k=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\lambda=6\,mm\ ,\ \omega = 40\pi\ rad/s,\ f=\frac{\omega}{2\pi}\Rightarrow f=20\ Hz\ ,$$

$$\upsilon=\frac{\omega}{k}\Rightarrow\upsilon=0.12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ .$$

# Παράδειγμα 4: Λύση

II. Δυο διαδοχικοί κόμβοι ενός στάσιμου κύματος απέχουν μεταξύ τους μισό μήκος κύματος, οπότε έχουμε $\Delta x = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \Delta x = 3\,\mathrm{mm}$.

III. Η εγκάρσια ταχύτητα του στάσιμου κύματος δίνεται την σχέση

$$u(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} \Rightarrow u(x,t) = -20\pi \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\sin(40\pi t)\ ,\ u \to \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}},\ x \to \mathrm{mm},\ t \to \mathrm{s}\,,$$

οπότε για την δοθείσα στιγμή και θέση έχουμε $u = -20\pi \sin\frac{\pi}{2}\sin 45\pi \Rightarrow u = 0$.

# Εγκάρσια κύματα σε χορδή (ελαστικό νήμα)


Λύση της κυματικής εξίσωσης

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

με συνοριακές συνθήκες

$\psi(x=0,t)=0$ $\quad \upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ $\quad T$: τάση του νήματος

$\psi(x=L,t)=0$ $\quad \mu$: γραμμική πυκνότητα μάζας

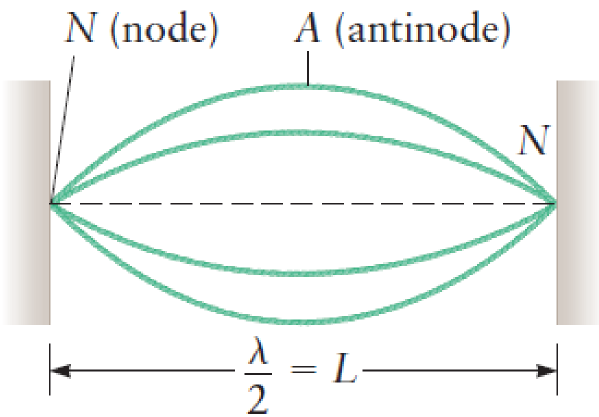
$$\boxed{\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \sin k_n x}$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \qquad \omega_n = v k_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad \text{and} \qquad \nu_n = \frac{nv}{2L}}$$

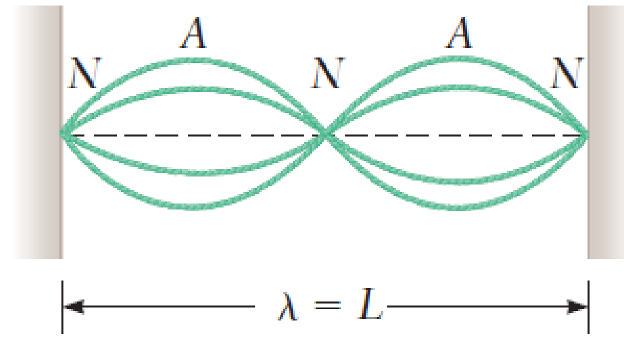
# Στάσιμα κύματα σε χορδή

Βασική $n = 1,\ v_1 = \dfrac{\upsilon}{2L}$

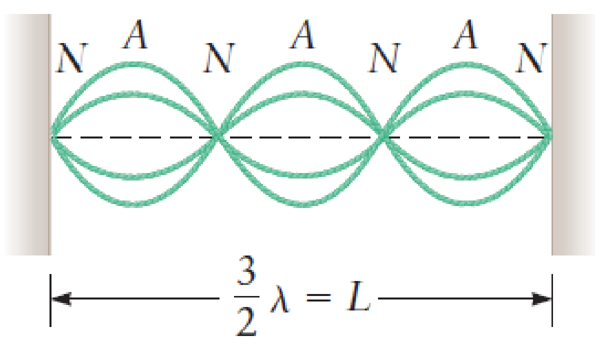



Fundamental, $\lambda = 2L$

Δεύτερη αρμονική $n = 2,\ v_2 = \dfrac{\upsilon}{L}$




Second harmonic, $\lambda = L$




Third harmonic, $\lambda = \dfrac{2L}{3}$

Τρίτη αρμονική $n = 3,\ v_3 = \dfrac{3\upsilon}{2L}$

# Χορδή με το ένα άκρο ελεύθερο και το άλλο πακτωμένο

Συνοριακές συνθήκες $\psi(x=0,t)=0, \left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x=L}=0$

$$\boxed{\psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(\omega_n t+\phi_n)\sin k_n x}$$

$$k_n=\frac{(n+1/2)\pi}{L} \qquad \omega_n=vk_n \qquad n=0,1,2,\ldots$$

$$\boxed{\lambda_n=\frac{2L}{n+1/2} \quad \text{and} \quad \nu_n=\frac{(n+1/2)v}{2L}}$$

# Χορδή με δύο ελεύθερα άκρα

Συνοριακές συνθήκες $\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$

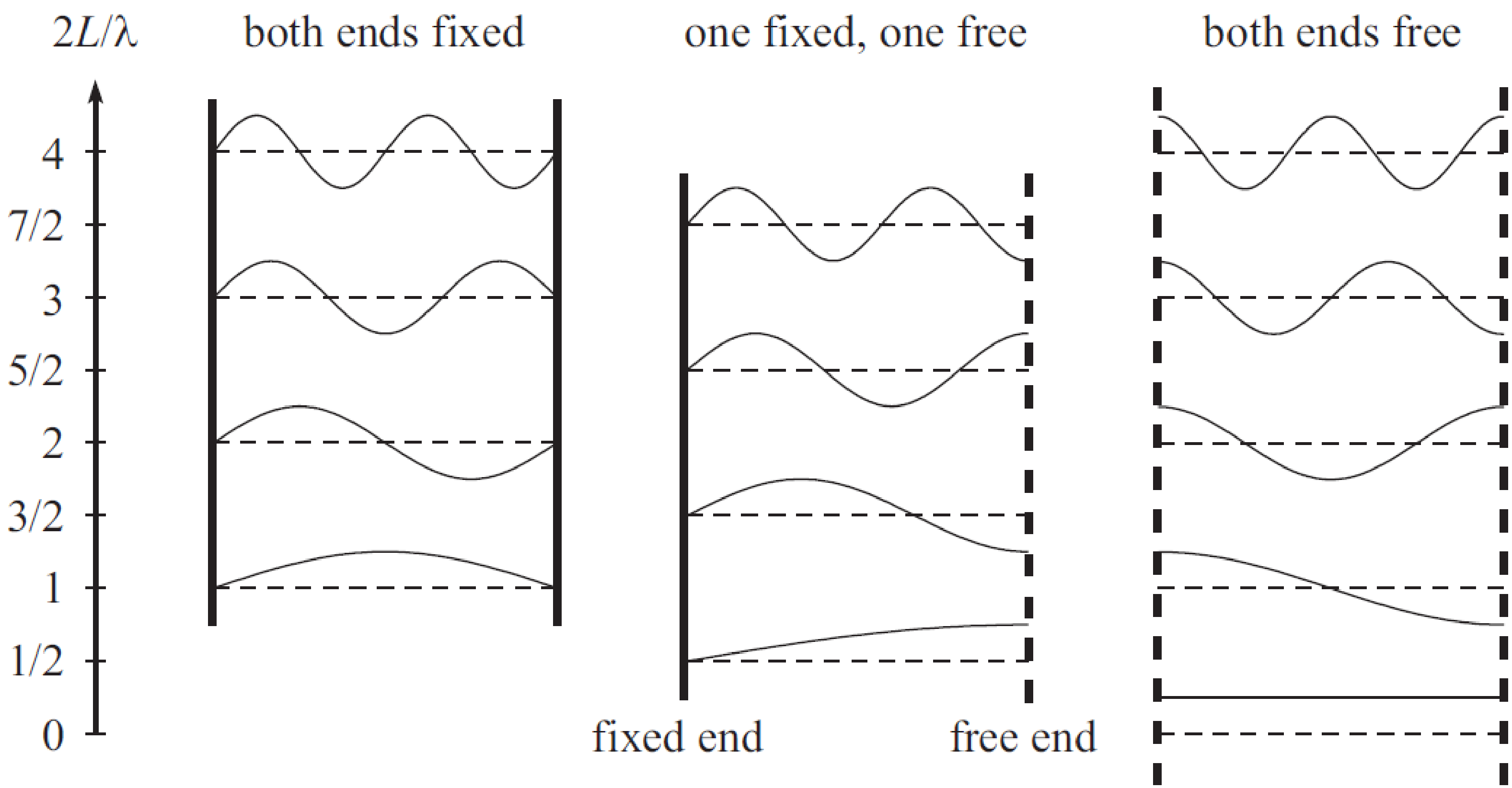
$$\boxed{\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \cos k_n x}$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \qquad \omega_n = v k_n$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad \text{and} \qquad \nu_n = \frac{nv}{2L}}$$

# Σχηματικά αποτελέσματα για εγκάρσια κύματα σε χορδή



# Παράδειγμα 5

Σε μια χορδή μήκους 60 cm που στερεώνεται σταθερά στα δύο άκρα της έχει αποκατασταθεί ένα στάσιμο κύμα, το οποίο περιγράφεται από την κυματική εξίσωση $y(x,t) = 5\sin\left(\frac{\pi x}{20}\right)\sin\left(90\pi t\right)$, όπου τα $y$, $x$ έχουν εκφραστεί σε cm και το $t$ σε s. Να βρεθούν η συχνότητα του στάσιμου κύματος και ο κανονικός τρόπος ταλάντωσης (πρώτος, δεύτερος, τρίτος, κλπ) που ταλαντώνεται η χορδή.

**Λύση**

Σε μια χορδή, που στερεώνεται σταθερά στα δύο άκρα της η μορφή για τον $n$-οστό κανονικό τρόπο ταλάντωσης έχουμε $y_n(x,t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\omega_n t\right), n = 1, 2, 3, \ldots$.

Οπότε αφού στην περίπτωση μας $y(x,t) = 5\sin\left(\frac{\pi x}{20}\right)\sin\left(90\pi t\right)$, τότε η κυκλική συχνότητα είναι $\omega = 90\pi$ rad/s και η συχνότητα $f = 45$ Hz. Επίσης, αφού $L$ = 60 cm, τότε $n$ = 3, άρα η χορδή ταλαντώνεται στον τρίτο κανονικό τρόπο ταλάντωσης.

# Παράδειγμα 6

Δίνονται δύο χορδές με ίδια ταχύτητα διάδοσης κυμάτων με μήκη $L$ και $L'$. Η χορδή μήκους $L$ έχει και τα δύο άκρα πακτωμένα ενώ η άλλη με μήκος $L'$ έχει το ένα άκρο ελεύθερο και το άλλο πακτωμένο.

I. Βρείτε τον λόγο $L/L'$ αν οι τρίτες αρμονικές στις δυο χορδές έχουν το ίδιο μήκος κύματος και γράψτε την συναρτησιακή μορφή της απομάκρυνσης $y(x,t)$ για τις συγκεκριμένες αρμονικές. Εξηγήστε γιατί ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες από την συγκεκριμένη μορφή $y(x,t)$.

II. Βρείτε τον λόγο $L/L'$ αν απελευθερωθούν και τα δύο άκρα της χορδής με μήκος $L'$.

III. Πως αλλάζουν οι παραπάνω απαντήσεις αν οι ταχύτητες διάδοσης των κυμάτων στις χορδές δεν είναι ίδιες;

# Παράδειγμα 6: Λύση

Ι. Για χορδή με σταθερά άκρα ισχύει ότι $\lambda_n = \dfrac{2L}{n}$ όπου $n = 1, 2, 3, \ldots$ δίνει τις αντίστοιχες αρμονικές. Η ίδια σχέση ισχύει και για χορδή με ελεύθερα τα δύο άκρα. Για χορδή με ελεύθερο το ένα άκρο ισχύει $\lambda'_{n'} = \dfrac{2L'}{n' + \frac{1}{2}}$, όπου $n' = 0, 1, 2, \ldots$ με το $n' = 0$ να αντιστοιχεί στη βασική συχνότητα (πρώτη αρμονική) και το $n' = 1$ να αντιστοιχεί στην τρίτη αρμονική. Σύμφωνα με την εκφώνηση οι τρίτες αρμονικές στις δυο χορδές έχουν το ίδιο μήκος κύματος, έτσι $\lambda_3 = \lambda'_1 \Rightarrow \dfrac{2L}{3} = \dfrac{4L'}{3}$. Άρα $\dfrac{L}{L'} = 2$.

Η συναρτησιακή μορφή της απομάκρυνσης για την τρίτη αρμονική για χορδή μήκους $L$ που έχει και τα δύο άκρα πακτωμένα είναι $y(x,t) = B\sin\left(\dfrac{3\pi x}{L}\right)\cos(\omega t + \varphi)$ , όπου $\omega = \dfrac{3\pi \upsilon}{L}$ με $\upsilon$ την ταχύτητα διάδοσης του κύματος στη χορδή και $\varphi$ μια σταθερή φάση. Επίσης, είναι φανερό, από την σχέση της $y(x,t)$ ότι οι συνοριακές συνθήκες $y(0,t) = y(L,t) = 0$ ικανοποιούνται.

# Παράδειγμα 6: Λύση

Η συναρτησιακή μορφή της απομάκρυνσης για την τρίτη αρμονική για χορδή μήκους $L'$ που έχει το ένα άκρο ελεύθερο και το άλλο πακτωμένο είναι $y'(x,t) = B' \sin\left(\frac{3\pi x}{2L'}\right)\cos(\omega' t + \varphi')$ , όπου $\omega' = \frac{3\pi \upsilon}{2L'}$ με $\varphi'$ μια σταθερή φάση. Επίσης, είναι φανερό, από την σχέση της $y'(x,t)$ ότι οι συνοριακές συνθήκες $y'(0,t) = 0, \left.\frac{\partial y'}{\partial x}\right|_{x=L'} = 0,$ ικανοποιούνται.

II. Αν απελευθερωθούν και τα δύο άκρα της δεύτερης χορδής, τότε, όπως αναφέραμε και παραπάνω $\lambda'_{n'} = \frac{2L'}{n'}$, όπου $n' = 1, 2, 3, \ldots$ δίνει τις αντίστοιχες αρμονικές. Άρα για τις τρίτες αρμονικές σε αυτή την περίπτωση $n = n' = 3$. Έτσι πάλι με διαίρεση κατά μέλη των αντίστοιχων σχέσεων που δίνουν τα επιτρεπτα μήκη κύματος βρίσκουμε $\frac{L}{L'} = 1$.

III. Τα επιτρεπόμενα μήκη κύματος είναι ανεξάρτητα από την ταχύτητα διάδοσης και έτσι οι παραπάνω απαντήσεις δεν αλλάζουν.

# Μεταφορά ενέργειας ημιτονοειδούς κύματος σε νήμα

Καθώς τα κύματα διαδίδονται σε ένα μέσο, μεταφέρουν ενέργεια.

Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε κάθε στοιχείο του νήματος ως έναν απλό αρμονικό ταλαντωτή.

- Η ταλάντωση γίνεται στον άξονα *y*.

Κάθε στοιχείο έχει την ίδια συνολική ενέργεια.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε στοιχείο έχει μάζα *dm*.

Η κινητική ενέργεια που έχει ένα στοιχείο λόγω της κατακόρυφης κίνησής του είναι $dK = ½(dm)v_y^2$.

Η μάζα d*m* είναι επίσης ίση με $\mu dx$. $\mu$ : γραμμική πυκνότητα μάζας

Η κινητική ενέργεια ενός στοιχείου του νήματος είναι $dK = ½(\mu dx)v_y^2$.

# Μεταφορά ενέργειας ημιτονοειδούς κύματος σε νήμα: Συνέχεια

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση για όλα τα στοιχεία βρίσκουμε τη συνολική κινητική ενέργεια ενός μήκους κύματος $K_\lambda = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2\lambda$.

Η συνολική δυναμική ενέργεια ενός μήκους κύματος είναι $U_\lambda = \frac{1}{4}\mu\,\omega^2 A^2\lambda$.

Επομένως, η συνολική ενέργεια είναι

- $E_\lambda = K_\lambda + U_\lambda = \frac{1}{2}\mu\,\omega^2 A^2\lambda$

# Ισχύς ενός ημιτονοειδούς κύματος σε νήμα

Η ισχύς είναι ο ρυθμός μεταφοράς της ενέργειας:

$$P = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{\frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$$

$T$ : περίοδος του κύματος

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{v},$$ $v$ η ταχύτητα του κύματος

Η ισχύς που μεταφέρει ένα ημιτονοειδές κύμα, το οποίο διαδίδεται σε ένα νήμα είναι ανάλογη

- του τετραγώνου της συχνότητας
- του τετραγώνου του πλάτους
- της ταχύτητας του κύματος

Ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας σε οποιοδήποτε ημιτονοειδές κύμα είναι ανάλογος του τετραγώνου της κυκλικής συχνότητας και του τετραγώνου του πλάτους.

# Ηχητικά κύματα

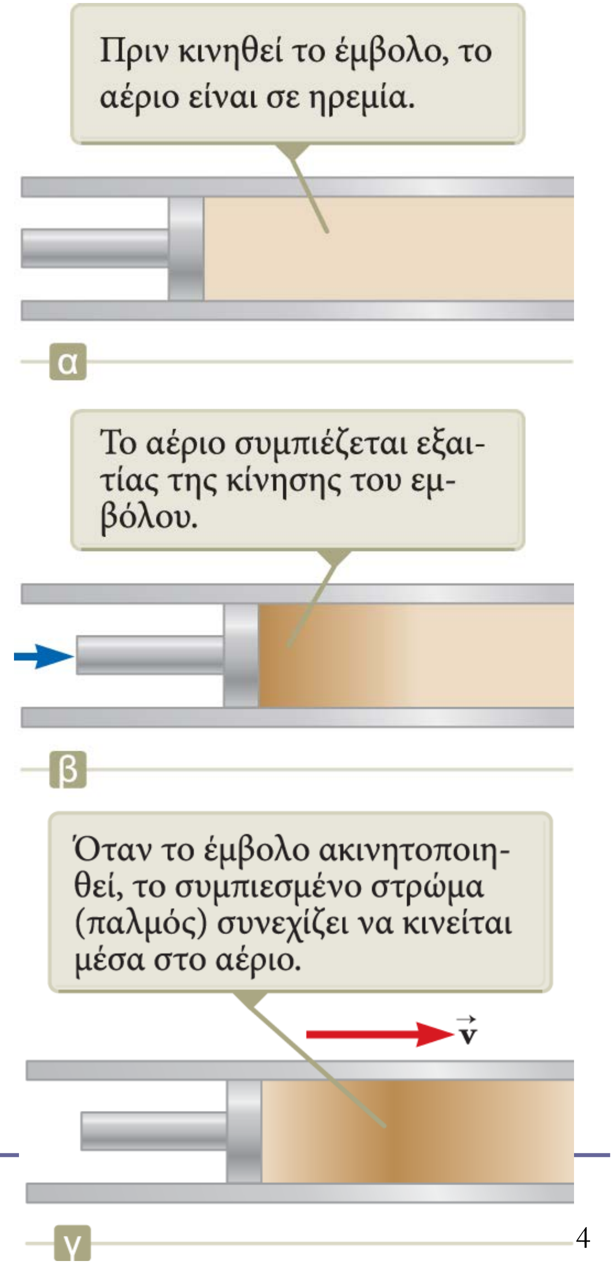
- Τα ηχητικά κύματα είναι διαμήκη κύματα.
- Διαδίδονται σε οποιοδήποτε υλικό.
  - Είναι μηχανικά κύματα, τα οποία διαδίδονται στον αέρα και διεγείρουν την ανθρώπινη ακοή.
  - Καθώς τα ηχητικά κύματα διαδίδονται στον αέρα, τα σωματίδια του αέρα απομακρύνονται από τις θέσεις ισορροπίας τους.
  - Οι κινήσεις αυτές συνοδεύονται από μεταβολές της πυκνότητας και της πίεσης του αέρα.
- Η μαθηματική περιγραφή των ημιτονοειδών ηχητικών κυμάτων είναι παρόμοια με την περιγραφή των ημιτονοειδών κυμάτων που διαδίδονται σε νήματα.

# Οδεύον ηχητικό κύμα

- Στην εικόνα φαίνεται η κίνηση ενός μονοδιάστατου διαμήκους ηχητικού παλμού, ο οποίος διαδίδεται σε έναν μακρύ σωλήνα που περιέχει ένα συμπιεστό αέριο.
- Το έμβολο στο αριστερό άκρο του σωλήνα μπορεί να κινηθεί γρήγορα προς τα δεξιά για να συμπιέσει το αέριο και να δημιουργήσει τον παλμό.
- Πριν κινηθεί το έμβολο, το αέριο έχει ομοιόμορφη πυκνότητα.
- Αν σπρώξουμε απότομα το έμβολο προς τα δεξιά, το αέριο που βρίσκεται μπροστά από αυτό συμπιέζεται.
  - Η σκούρα περιοχή στην εικόνα (β).
  - Η πίεση και η πυκνότητα σε αυτό το στρώμα αερίου είναι μεγαλύτερες από ό,τι πριν ωθήσουμε το έμβολο.

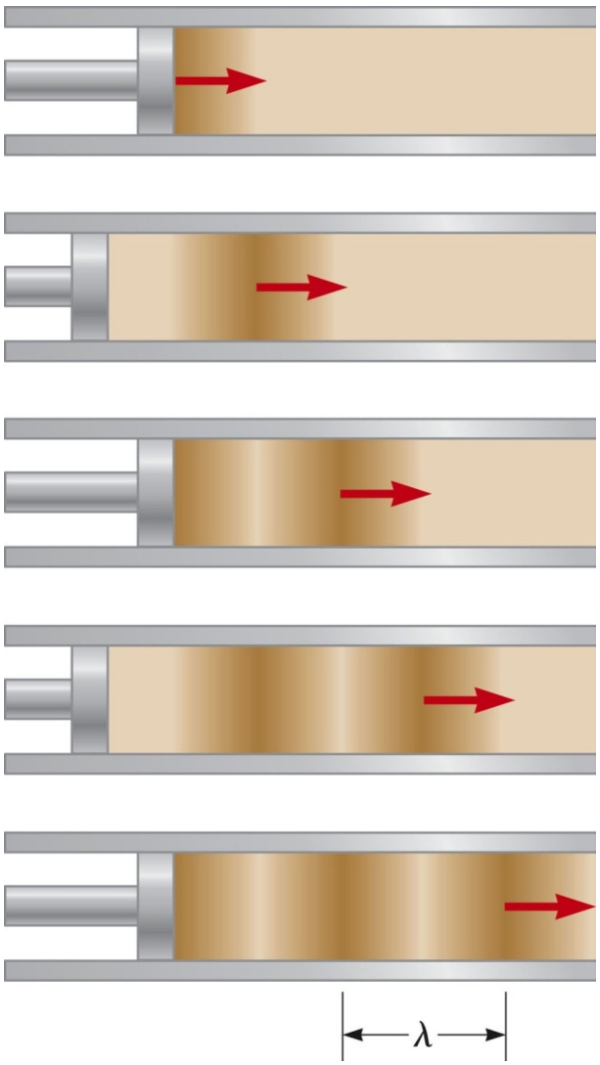
Μόλις το έμβολο ακινητοποιηθεί, το συμπιεσμένο στρώμα του αερίου συνεχίζει να κινείται.

- Το πύκνωμα αυτό είναι ένας διαμήκης παλμός, ο οποίος διαδίδεται στον σωλήνα με ταχύτητα v, δείτε εικόνα (γ).



# Αρμονικό ηχητικό κύμα

- Αν αναγκάσουμε το έμβολο να εκτελέσει απλή αρμονική κίνηση, θα δημιουργήσουμε ένα μονοδιάστατο, αρμονικό (περιοδικό) ηχητικό κύμα.
- Τα σκουρόχρωμα τμήματα στις εικόνες είναι περιοχές όπου το αέριο έχει συμπιεστεί. Η πυκνότητα και η πίεση σε αυτές τις περιοχές έχουν τιμές μεγαλύτερες από τις τιμές ισορροπίας. Οι συμπιεσμένες περιοχές ονομάζονται **πυκνώματα**.
- Όταν τραβάμε το έμβολο προς τα πίσω, το αέριο που βρίσκεται μπροστά από το έμβολο εκτονώνεται, οπότε η πίεση και η πυκνότητα σε αυτή την περιοχή έχουν τιμές μικρότερες από τις τιμές ισορροπίας. Οι περιοχές χαμηλής πίεσης ονομάζονται **αραιώματα**.
- Τα αραιώματα διαδίδονται στον σωλήνα ακολουθώντας τα πυκνώματα. Τα πυκνώματα και τα αραιώματα κινούνται στο μέσο με την ταχύτητα του ήχου. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών πυκνωμάτων ή αραιωμάτων ισούται με το μήκος κύματος.



# Αρμονικά ηχητικά κύματα: Μετατόπιση

- Καθώς τα πυκνώματα και τα αραιώματα διαδίδονται στον σωλήνα, κάθε μικρό στοιχειώδες τμήμα του αερίου εκτελεί απλή αρμονική κίνηση παράλληλα με τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.
- Η αρμονική συνάρτηση θέσης είναι

$$s(x, t) = s_{max} \cos(kx - \omega t)$$

όπου

  - $s_{max}$ είναι η μέγιστη θέση του στοιχείου ως προς τη θέση ισορροπίας (το πλάτος μετατόπισης του κύματος).
  - $k$ είναι ο κυματαριθμός.
  - $\omega$ είναι η κυκλική συχνότητα του κύματος.

Σημειώστε ότι η μετατόπιση του στοιχείου γίνεται κατά μήκος του άξονα $x$, δηλαδή στη διεύθυνση διάδοσης του ηχητικού κύματος (διαμήκες κύμα).

# Αρμονικά ηχητικά κύματα: Πίεση

- Η μεταβολή $\Delta P$ της πίεσης του αερίου είναι επίσης περιοδική.

$$\Delta P = \Delta P_{max} \sin(kx - \omega t)$$

όπου

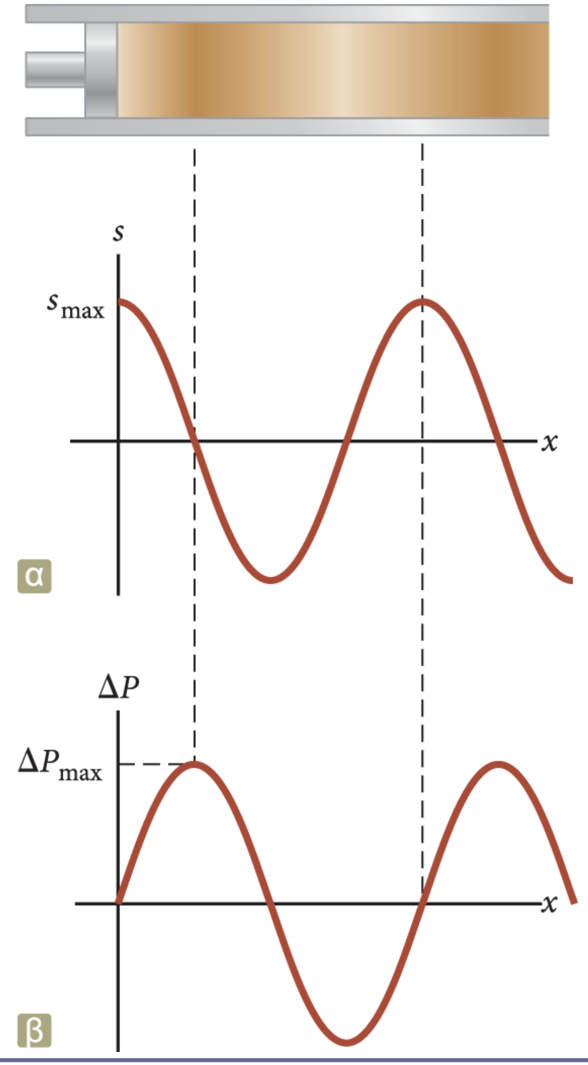
  - $\Delta P_{max}$ είναι το πλάτος της πίεσης. Είναι η μέγιστη μεταβολή της πίεσης από την τιμή ισορροπίας.
  - $k$ είναι ο κυματαριθμός.
  - $\omega$ είναι η κυκλική συχνότητα.
- Η πίεση μπορεί να συσχετιστεί με τη μετατόπιση.
  - Τα δύο μεγέθη συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\Delta P_{max} = B s_{max} k.$$

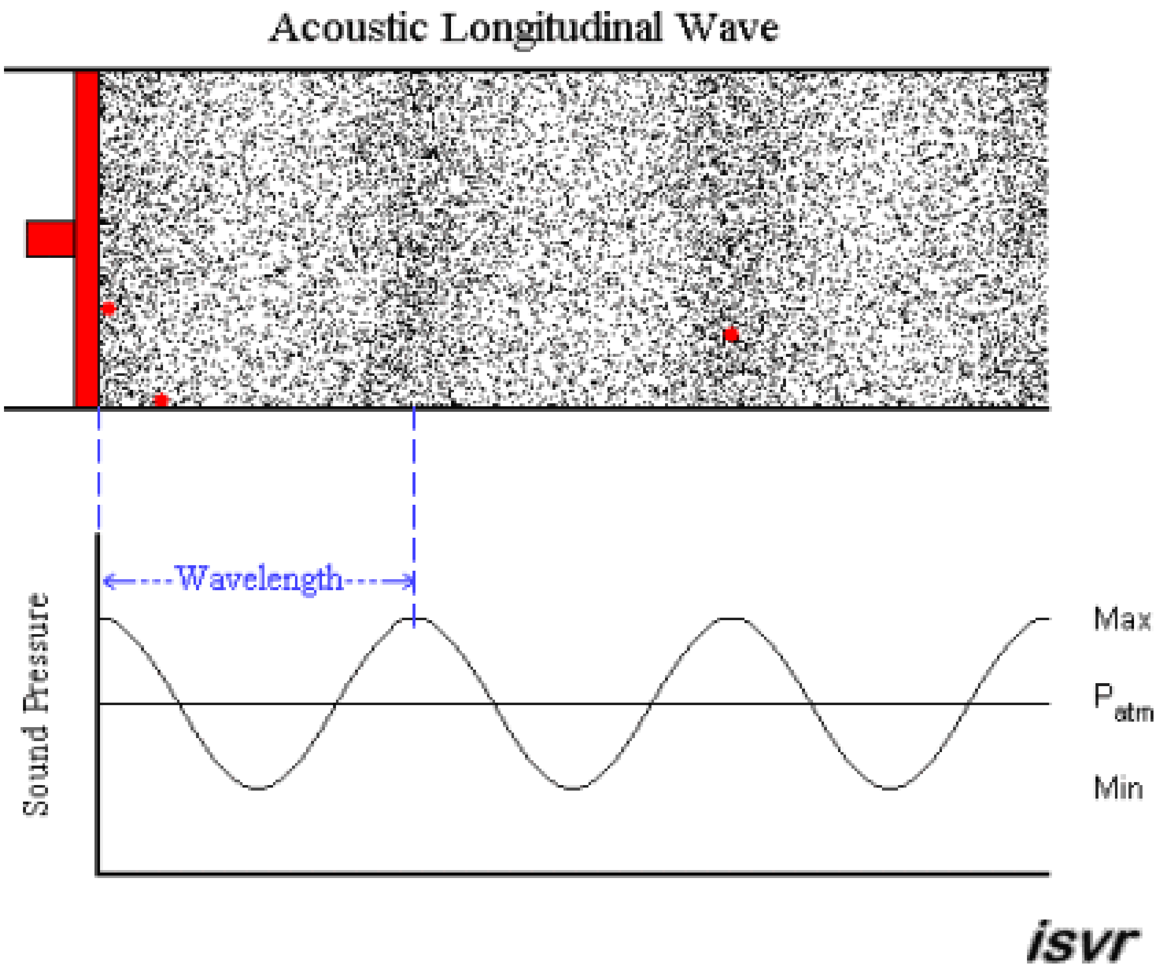
Το $B$ είναι το μέτρο ελαστικότητας όγκου του υλικού.

# Αρμονικά ηχητικά κύματα: Μετατόπιση και πίεση

- Ένα ηχητικό κύμα μπορεί να θεωρηθεί είτε ως κύμα μετατόπισης είτε ως κύμα πίεσης.
- Το κύμα της πίεσης και το κύμα της μετατόπισης έχουν διαφορά φάσης 90°.
  - Η πίεση είναι μέγιστη όταν η μετατόπιση είναι μηδενική, κ.λπ.



# Μεταβολή της πίεσης σε αρμονικά ηχητικά κύματα



# Ιδιοσυχνότητες αυλών

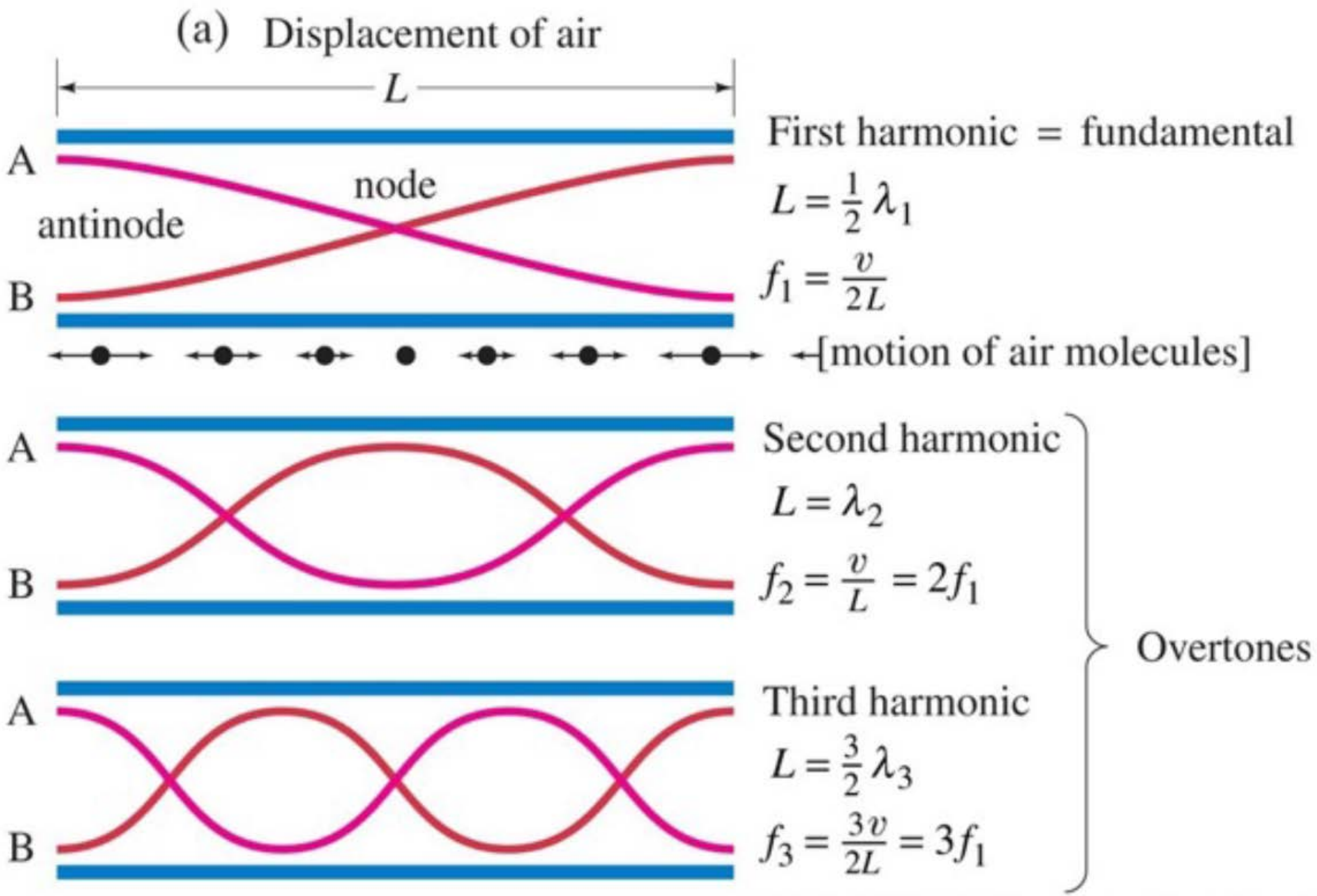
- Μαθηματικά το πρόβλημα της διάδοσης ήχου (διαμήκων κυμάτων) σε αυλούς είναι παρόμοιο με το πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων σε χορδή που μόλις μελετήσαμε.
- Έτσι αν $v$ η ταχύτητα του ήχου και *L* το μήκος του αυλού, τότε αν ο αυλός είναι ανοικτός και από τα δύο άκρα του

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad \text{and} \qquad \nu_n = \frac{nv}{2L}} \quad n = 1, 2, \ldots$$

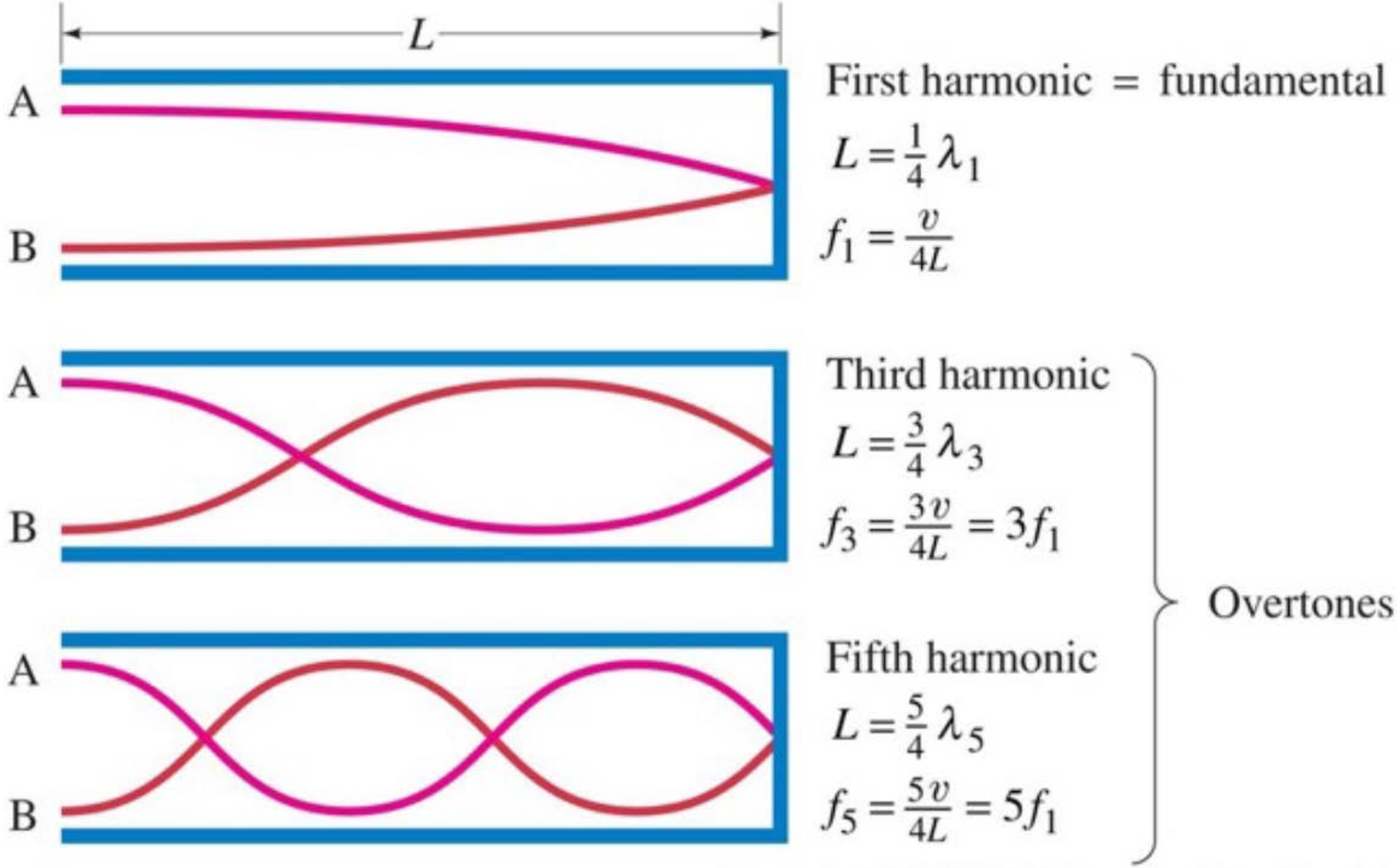
- Ενώ αν έχει ένα άκρο ανοικτό και ένα κλειστό

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n+1/2} \qquad \text{and} \qquad \nu_n = \frac{(n+1/2)v}{2L}} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

# Αυλός με δύο άκρα ανοικτά



# Αυλός με ένα άκρο ανοικτό και ένα κλειστό



# Παράδειγμα 8

Ένας αυλός που είναι ανοικτός και στα δύο άκρα του ξαφνικά κλείνει το ένα άκρο του. Το αποτέλεσμα αυτού είναι ότι η συχνότητα της τρίτης αρμονικής του αυλού που είναι κλειστός στο ένα άκρο του είναι μεγαλύτερη κατά 100 Hz από τη βασική συχνότητα του αυλού που είναι ανοικτός και στα 2 άκρα του. Να βρεθεί η βασική συχνότητα του αυλού που είναι ανοικτός και στα δύο άκρα του.

# Παράδειγμα 8: Λύση

Η βασική συχνότητα του αυλού που είναι ανοικτός και στα δύο άκρα του είναι:

$\nu_1 = \dfrac{\upsilon}{2L}$, όπου $\upsilon$ είναι η ταχύτητα του ήχου στον αέρα και $L$ το μήκος του αυλού.

Αν ο αυλός είναι κλειστός στο ένα άκρο του τότε η βασική συχνότητα γίνεται:

$\nu_1' = \dfrac{\upsilon}{4L}$ ενώ η τρίτη αρμονική $\nu_3' = 3\dfrac{\upsilon}{4L}$.

Από τα δεδομένα έχουμε ότι:

$$\nu_3' = \nu_1 + 100Hz \Rightarrow 3\frac{\upsilon}{4L} = \frac{\upsilon}{2L} + 100Hz \Rightarrow \frac{\upsilon}{L} = 400Hz \Rightarrow \frac{\upsilon}{2L} = 200Hz.$$

Άρα η ζητούμενη συχνότητα είναι: $\nu_1 = \dfrac{\upsilon}{2L} = 200Hz$.

# Ταχύτητα μηχανικών κυμάτων και ταχύτητα του ήχου

Η ταχύτητα διάδοσης των ηχητικών κυμάτων σε ένα μέσο εξαρτάται από τη συμπιεστότητα και την πυκνότητα του μέσου.

Συχνά, μπορούμε να εκφράσουμε τη συμπιεστότητα συναρτήσει του μέτρου ελαστικότητας όγκου του υλικού.

Η ταχύτητα *όλων των μηχανικών κυμάτων* δίνεται από τη γενική σχέση:

$$v = \sqrt{\frac{\text{ελαστική ιδιότητα}}{\text{αδρανειακή ιδιότητα}}}$$

Η ταχύτητα του ήχου σε μια ράβδο συμπαγούς υλικού εξαρτάται από το μέτρο ελαστικότητας του Young και από την πυκνότητα του υλικού.

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

όπου

- $B$ είναι το μέτρο ελαστικότητας όγκου του υλικού.
- $\rho$ είναι η πυκνότητα του υλικού.

# Ταχύτητα του ήχου

- Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα, σε θερμοκρασία 20 ℃, είναι περίπου 343 m/s.
- Η ταχύτητα του ήχου εξαρτάται σημαντικά από το μέσο που διαδίδεται. Η τυπική συμπεριφορά είναι ότι ταχύτητα είναι μικρότερη σε αέρια, μεγαλύτερη σε υγρά και ακόμα μεγαλύτερη σε στερεά. Π.χ. στο νερό είναι περίπου 1481 m/s και στο σίδηρο 5120 m/s.
- Η ταχύτητα του ήχου εξαρτάται σημαντικά και από τη θερμοκρασία. Γενικά, η αύξηση της θερμοκρασίας οδηγεί σε αύξηση της ταχύτητας του ήχου.

# Σημειακές πηγές και σφαιρικά κύματα

Μια **σημειακή πηγή** εκπέμπει ηχητικά κύματα προς όλες τις κατευθύνσεις.

- Το αποτέλεσμα είναι ένα **σφαιρικό κύμα.**

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα σφαιρικά κύματα ως ομόκεντρα κυκλικά τόξα με κέντρο την πηγή.

Κάθε επιφάνεια σταθερής φάσης ονομάζεται **μέτωπο κύματος** ή **ισοφασική επιφάνεια**.

Η ακτινική απόσταση μεταξύ διαδοχικών μετώπων του κύματος, τα οποία έχουν την ίδια φάση, είναι το μήκος $\lambda$ του κύματος.

Οι ακτινικές ευθείες που ξεκινούν από την πηγή και έχουν φορά προς τα έξω δείχνουν προς την κατεύθυνση διάδοσης των κυμάτων και ονομάζονται **ακτίνες**.

# Ένταση σημειακής πηγής (σφαιρικών κυμάτων)

Η ισχύς κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλη την επιφάνεια της σφαίρας.

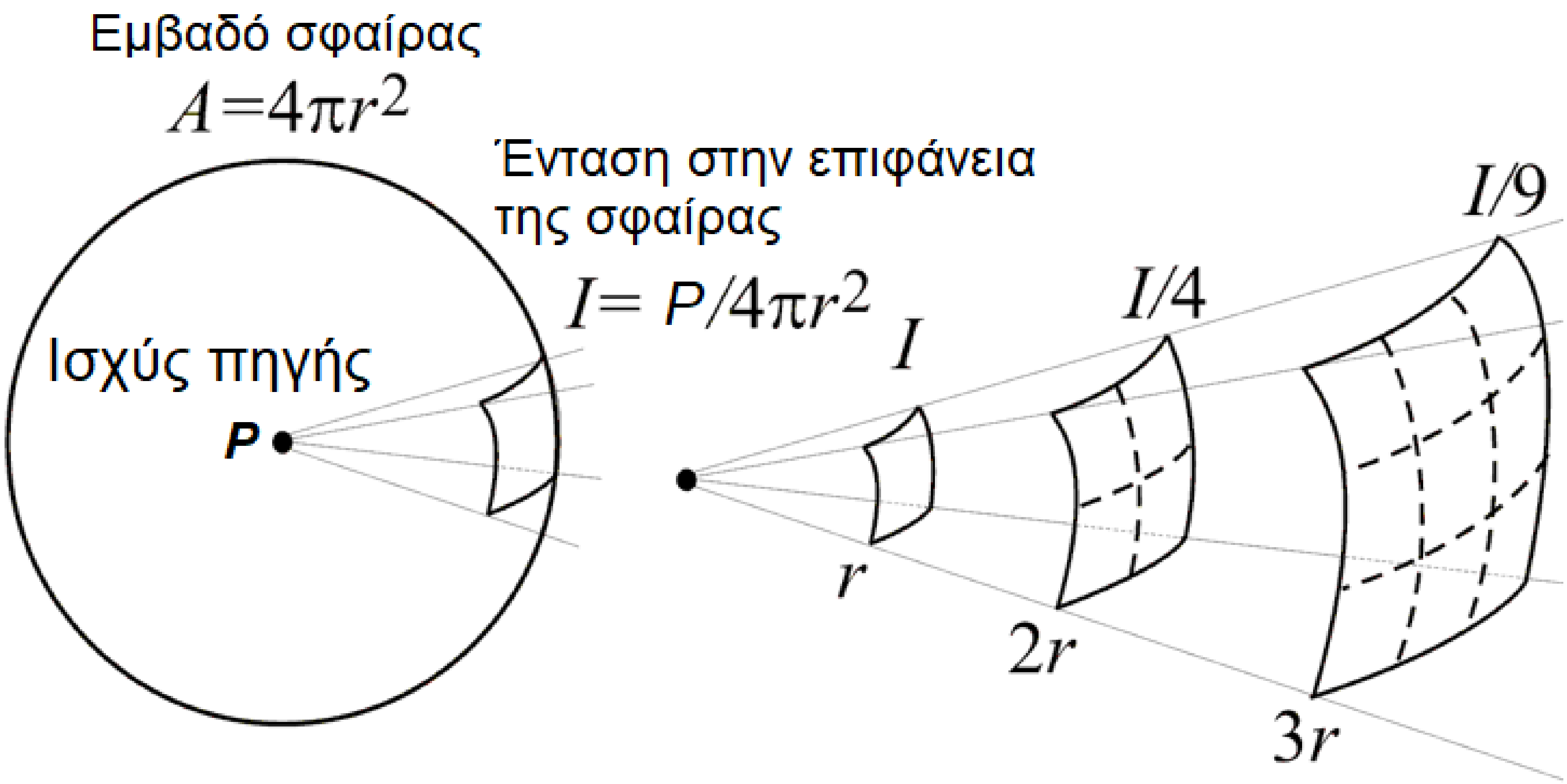
Η ένταση του κύματος σε απόσταση $r$ από την πηγή είναι

$$I = \frac{(\text{Ισχύς})_{\text{μέση}}}{A} = \frac{(\text{Ισχύς})_{\text{μέση}}}{4\pi r^2}$$

Η παραπάνω σχέση είναι ένας νόμος αντίστροφου τετραγώνου.

- Η ένταση είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης από την πηγή.

# Ένταση σημειακής πηγής (σφαιρικών κυμάτων): Συνέχεια



# Ηχοστάθμη

- Το εύρος των εντάσεων που μπορεί να αντιληφθεί το ανθρώπινο αυτί είναι πολύ μεγάλο.
- Μας διευκολύνει να χρησιμοποιούμε λογαριθμική κλίμακα για να προσδιορίζουμε την ηχοστάθμη (ή ηχητική στάθμη) $\beta$.

$$\beta = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

- Το $I$ είναι η ένταση του ήχου την ηχοστάθμη του οποίου θέλουμε να προσδιορίσουμε.

Η σταθερά $I_0$ ονομάζεται **ένταση αναφοράς**. Αντιστοιχεί στο κατώφλι ακοής.
$I_0 = 1.00 \times 10^{-12}$ W/ m$^2$

# Κλίμακα decibel

- Η ηχοστάθμη $\beta$ μετριέται σε decibel (dB).
- Όριο πόνου: $I$ = 1.00 W/m$^2$, $\beta$ = 120 dB
- Κατώφλι ακοής: Η ένταση αναφοράς $I_0 = 1.00 \times 10^{-12}$ W/ m$^2$ αντιστοιχεί σε ηχοστάθμη $\beta$ = 0 dB.
- Παράδειγμα: Ποια ηχοστάθμη αντιστοιχεί σε ένταση $2.0 \times 10^{-7}$ W/m$^2$;

$$\beta = 10 \log (2.0 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2 / 1.0 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2)$$

$$= 10 \log 2.0 \times 10^5$$

$$= 53 \text{ dB}$$

# Υπέρθεση κυμάτων - Διακρότημα

- Ας πάρουμε τώρα την υπέρθεση 2 αρμονικών κυμάτων που έχουν ίδιο πλάτος και φάση, αλλά έχουν διαφορετική συχνότητα και μήκος κύματος, και κινούνται στην ίδια κατεύθυνση και είναι της μορφής

$$y_1(z,t) = A\sin(k_1 z - \omega_1 t),\ y_2(z,t) = A\sin(k_2 z - \omega_2 t)$$

- Αφού

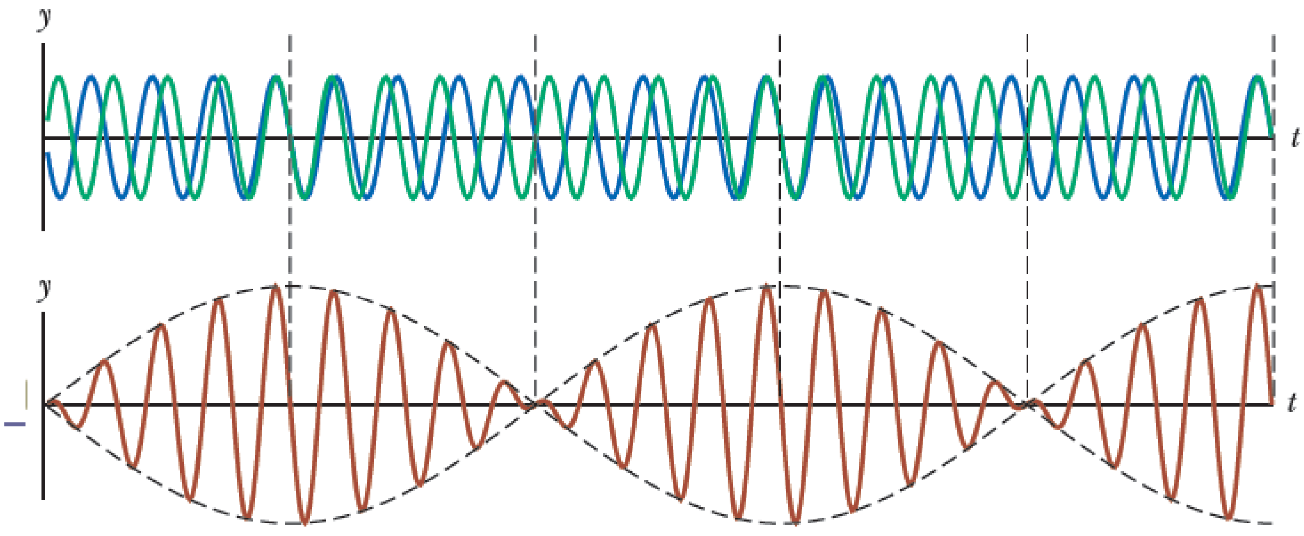
$$\sin a + \sin b = 2\cos\left[\frac{1}{2}(a-b)\right]\sin\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]$$

$$y_1(z,t) + y_2(z,t) =$$

$$2A\cos\left[\frac{1}{2}(k_1 - k_2)z - \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right]\sin\left[\frac{1}{2}(k_1 + k_2)z - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right]$$

# Διακρότημα

- Εάν οι συχνότητες των δύο κυμάτων είναι κοντινές, δηλαδή $\nu_1 \approx \nu_2$ τότε το κύμα ταλαντώνεται με την μέση συχνότητα $(\nu_1 + \nu_2)/2$ ενώ το πλάτος του μεταβάλλεται σημαντικά και παρουσιάζει διαμόρφωση στο χρόνο. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται διακρότημα.
- Η συχνότητα του διακροτήματος είναι διπλάσια της συχνότητας διαμόρφωσης πλάτους, δηλαδή




$$\nu_{beat} = |\nu_1 - \nu_2|$$

# Παράδειγμα 9

Ένα κυλινδρικό μεταλλικό νήμα διαμέτρου 1.5 mm κρατείται σταθερό στα δύο άκρα του που βρίσκονται σε απόσταση 50 cm. Αν ασκείται στο νήμα τάση 100 N τότε το νήμα ταλαντώνεται στη θεμελιώδη συχνότητα και σε συνδυασμό με ταλαντευμένο διαπασών παράγει 5 διακροτήματα ανά δευτερόλεπτο. Αν μειωθεί η τάση του νήματος σε 81 N τότε το νήμα ξανά ταλαντώνεται στη θεμελιώδη του συχνότητα και πάλι σε συνδυασμό με το ίδιο διαπασών παράγει και σε αυτή την περίπτωση 5 διακροτήματα ανά δευτερόλεπτο. Να βρεθούν η συχνότητα ταλάντωσης του διαπασών και η πυκνότητα του υλικού του νήματος.

# Παράδειγμα 9: Λύση

Έστω $v_1$ η συχνότητα του διαπασών. Από τον ορισμό του διακροτήματος θα έχουμε ότι η συχνότητα του διακροτήματος θα είναι $v_\delta = |v_1 - v_2|$. Με την αλλαγή της τάσης του νήματος θα αλλάξει και η τιμή της ιδιοσυχνότητας ταλάντωσης του μεταλλικού νήματος αφού στη θεμελιώδη συχνότητα $v_2 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ με $T_0$ την τάση του νήματος και $\mu$ η γραμμική πυκνότητας μάζας. Για να διατηρείται σταθερή η συχνότητα των διακροτημάτων με τη μείωση της τάσης του νήματος, που οδηγεί και σε μείωση της ιδιοσυχνότητας ταλάντωσης του νήματος θα έχουμε για $T_0 = 100\ \mathrm{N}$

$$\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_0}{\mu}} - v_1 = v_\delta$$

για $T_0^* = 81\ \mathrm{N}$ έχουμε

$$v_1 - \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_0^*}{\mu}} = v_\delta$$

με $v_\delta = 5\ \mathrm{Hz}$ και $L = 0.5\ \mathrm{m}$.

# Παράδειγμα 9: Λύση

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε

$$\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_0}{\mu}} - \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_0^*}{\mu}} = 2\nu_\delta$$

και με αντικατάσταση των δεδομένων, έχουμε σε μονάδες SI

$$10\sqrt{\frac{1}{\mu}} - 9\sqrt{\frac{1}{\mu}} = 10 \Rightarrow \frac{1}{\mu} = 100 \Rightarrow \mu = 0.01 \text{ kg/m}\,.$$

Έτσι με αντικατάσταση σε μια από τις δύο παραπάνω αρχικές εξισώσεις (π.χ. στη δεύτερη) βρίσκουμε τη συχνότητα του διαπασών, ως

$$\nu_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_0^*}{\mu}} + \nu_\delta = 90 \text{ Hz} + 5 \text{ Hz} = 95 \text{ Hz}\,.$$

Επίσης, αφού το νήμα έχει κυλινδρικό σχήμα η γραμμική πυκνότητα μάζας με την πυκνότητα του υλικού του νήματος $\rho$ συνδέεται με τη σχέση

$$\rho = \frac{\mu}{\pi r^2}$$

όπου $r = 0.75$ mm η ακτίνα του νήματος. Με αντικατάσταση παίρνουμε την πυκνότητα του υλικού $\rho = 5658.8 \text{ kg/m}^3$.

# ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ MAXWELL ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \frac{Q_{\text{περικλ.}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(νόμος του Gauss)} \qquad (29.18)$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0 \qquad \text{(νόμος του Gauss για τον Μαγνητισμό)} \qquad (29.19)$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(νόμος του Faraday)} \qquad (29.20)$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \left( i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{\text{περικλ.}} \qquad \text{(νόμος του Ampère)} \qquad (29.21)$$

Αυτές οι εξισώσεις ισχύουν για ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία στο κενό. Παρουσία κάποιου υλικού, η ηλεκτρική σταθερά $\epsilon_0$ και η μαγνητική σταθερά $\mu_0$ αντικαθίστανται από την επιτρεπτότητα $\epsilon$ και τη διαπερατότητα $\mu$ του υλικού.

Σύμφωνα με τις εξισώσεις του Maxwell, ένα ακίνητο σημειακό φορτίο δημιουργεί ένα στατικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ και καθόλου πεδίο $\boldsymbol{B}$, ενώ ένα σημειακό φορτίο κινούμενο με σταθερή ή μεταβαλλόμενη ταχύτητα δημιουργεί αμφότερα τα πεδία $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{B}$.

Μπορούμε ακόμα να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις του Maxwell για να αποδείξουμε ότι, για να δημιουργήσει ένα σημειακό φορτίο ηλεκτρομαγνητικά κύματα, θα πρέπει να **επιταχυνθεί**. Μάλιστα, **κάθε** φορά που εκπέμπεται ηλεκτρομαγνητική ενέργεια, η πηγή είναι επιταχυνόμενα φορτία.

**32.1** Ο Σκοτσέζος φυσικός Τζέιμς Κλαρκ Μάξγουελ (1831-1879) ήταν ο πρώτος που πραγματικά κατανόησε τη θεμελιώδη φύση του φωτός. Συνέβαλε επίσης σημαντικά στη Θερμοδυναμική, την Οπτική, την Αστρονομία και την έγχρωμη φωτογραφία. Ο Albert Einstein [Άλμπερτ Αϊνστάιν, διάσημος φυσικός και φιλόσοφος (1879-1955), βραβείο Νομπέλ 1921] περιέγραψε τα επιτεύγματα του Μάξγουελ ως «τα πιο βαθιά και καρποφόρα που έχει γνωρίσει η Φυσική από την εποχή του Νεύτωνα».

# Εξισώσεις του Maxwell στο κενό

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$\boldsymbol{E}$ Ηλεκτρικό πεδίο

$\boldsymbol{B}$ Μαγνητικό πεδίο

$\varepsilon_0$ ηλεκτρική επιτρεπτότητα (διηλεκτρική σταθερά) του κενού

$\mu_0$ μαγνητική διαπερατότητα του κενού

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N\ m}^2}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$$

# Κυματικές εξισώσεις και ταχύτητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό

Από τις εξισώσεις του Maxwell έχουμε:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0$$

Μονοδιάστατη κυματική εξίσωση

Σύγκριση με την μονοδιάστατη κυματική εξίσωση που είδαμε:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \upsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \simeq 3.0 \times 10^8 \, m/s \; = c \; !$$

# Ιδιότητες ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό

Ειδικές λύσεις των κυματικών εξισώσεων Maxwell:

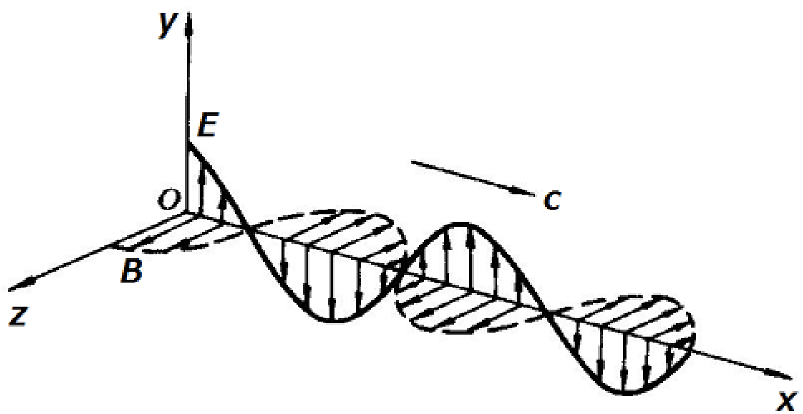
$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{j}E(x,t) = \boldsymbol{j}E_0 \cos\left[\omega(t - \frac{x}{c})\right]$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{k}B(x,t) = \boldsymbol{k}B_0 \cos\left[\omega(t - \frac{x}{c})\right]$$

1) Εγκάρσια κύματα

2) Σε φάση: $\dfrac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{B}|} = \dfrac{E_0}{B_0} = c$

3) $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$




4) Η διεύθυνση διάδοσης του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου είναι ίδια με το διάνυσμα του $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$

# Παράδειγμα 10

Το ηλεκτρικό πεδίο (σε μονάδες SI) ενός επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό δίνεται από τη σχέση $\boldsymbol{E}(x,t) = \boldsymbol{k}\, 9\sin[\pi(2\times10^6 x - 6\times10^{14} t)]$ V/m. Να βρείτε τη συχνότητα και το μήκος κύματος του, αλλά και το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

**Λύση**

Εδώ το ηλεκτρικό πεδίο είναι ένα ημιτονοειδές κύμα της μορφής $\boldsymbol{E}(x,t) = \boldsymbol{k}\, A\sin[kx-\omega t)]$. Άρα Από την πρότυπη μορφή ενός ημιτονοειδούς κύματος βρίσκουμε ότι η κυκλική συχνότητα είναι $\omega = 6\pi\times10^{14}$ rad/s και η συχνότητα $f = 3\times10^{14}$ Hz. Επίσης, ο κυματάριθμος είναι $k = 2\pi\times10^6\ \mathrm{m}^{-1} = 2\pi/\lambda$, άρα το μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι 1 μm. Επιπλέον, το ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στη θετική διεύθυνση του άξονα x και είναι πολωμένο στον άξονα z. Οπότε το μαγνητικό πεδίο θα είναι κάθετο και τα δύο, άρα πρέπει να είναι πολωμένο στον άξονα y και συγκεκριμένα να έχει διάνυσμα πόλωσης $-\boldsymbol{j}$, αφού το $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ πρέπει να δώσει διάνυσμα $\boldsymbol{i}$. Επίσης, η μορφή του μαγνητικού πεδίου είναι ίδια με αυτή του ηλεκτρικού πεδίου και το μέτρο του μαγνητικού πεδίου δίνεται από τη σχέση $B_y = E_z/c$. Για τα παραπάνω. Οπότε έχουμε $\boldsymbol{B}(x,t) = -\boldsymbol{j}\, 3\times10^{-8} \sin[\pi(2\times10^6 x - 6\times10^{14} t)]$ T.

# Κυματική εξίσωση σε υλικό μέσο

Θεωρούμε ομογενές και ισοτροπικό μέσο, με μηδενική πυκνότητα ελευθέρων φορτίων και πυκνότητα ρεύματος. Τότε από τις εξισώσεις του Maxwell έχουμε:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0$$

Ταχύτητα διάδοσης (φάσης)

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n}$$

$\mu$: Μαγνητική διαπερατότητα του μέσου

$\varepsilon$: Ηλεκτρική επιτρεπτότητα του μέσου ή διηλεκτρική σταθερά

Όπου $n = \sqrt{\dfrac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}}$

$n$: Δείκτης διάθλασης του μέσου

# Σχέσεις για ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο

- Έστω το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου της παρακάτω μορφής σε ομογενές και ισοτροπικό μέσο, με μηδενική πυκνότητα ελευθέρων φορτίων και πυκνότητας ρεύματος:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \varphi) \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \varphi)$$

Τότε $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0 \qquad \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B}_0 = 0 \qquad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0 = \omega \boldsymbol{B}_0$

Επίσης $B_0 = E_0 / \upsilon,$ όπου $B_0 = \left|\boldsymbol{B}_0\right|, E_0 = \left|\boldsymbol{E}_0\right|$

$\upsilon$ η ταχύτητα διάδοσης στο μέσο $(\upsilon = c / n)$.

# Παράδειγμα 11

Ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα ηλεκτρικού πλάτους 100 V/m και συχνότητας 300 MHz ταξιδεύει κατά τη θετική $z$ διεύθυνση σε ένα ομογενές, ισοτροπικό, μη-απορροφητικό και μη-μαγνητικό διηλεκτρικό μέσο με δείκτη διάθλασης $n = 3$. Εάν η μορφή του ηλεκτρικού πεδίου είναι $\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{i}E_0 \cos(kz - \omega t)$, βρείτε τις παραμέτρους και το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο.

**Λύση**

Από τα δεδομένα για το ηλεκτρικό πεδίο έχουμε $\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{i}E_0 \cos(kz - \omega t)$. Το πλάτος $E_0$ είναι $E_0 = 100$ V/m. Επίσης, η κυκλική συχνότητα είναι $\omega = 2\pi \times 300 \times 10^6$ rad/s $= 6\pi \times 10^8$ rad/s. Η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι $\upsilon = \dfrac{c}{n}$, όπου $c = 3\times 10^8$ m/s η ταχύτητα του φωτός στο κενό και $n = 3$ ο δείκτης διάθλασης του διηλεκτρικού μέσου. Άρα $\upsilon = 10^8$ m/s. Έτσι, ο κυματάριθμος δίνεται από τη σχέση $\omega = \upsilon k \Rightarrow k = \dfrac{\omega}{\upsilon} = 6\pi$ m$^{-1}$. Οπότε, αξιοποιώντας τα παραπάνω, παίρνουμε σε μονάδες SI:

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{i}100\cos\left(6\pi z - 6\pi \times 10^8 t\right) \text{ (V/m)}$$

# Παράδειγμα 11: Λύση

Το μαγνητικό πεδίο θα έχει τη γενική μορφή $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\eta} B_0 \cos(kz - \omega t)$. Όπως και στο αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο, $kz - \omega t = 6\pi z - 6\pi \times 10^8 t$. Το πλάτος του θα είναι $B_0 = \frac{E_0}{\upsilon} = \frac{100}{10^8}\ \mathrm{T} = 10^{-6}$ T ενώ το πεδίο θα είναι πολωμένο κατά τη θετική διεύθυνση του άξονα των $y$, δηλαδή $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{j}$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \omega \boldsymbol{B}$ (αφού το κυματάνυσμα είναι στο θετική z διεύθυνση και το ηλεκτρικό πεδίο είναι πολωμένο στη θετική $x$ διεύθυνση, τότε $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$ ). Οπότε:

$$\boldsymbol{B}(z,t) = \boldsymbol{j} 10^{-6} \cos\left(6\pi z - 6\pi \times 10^8 t\right) \ \ (\mathrm{T})$$

# ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΙ ΟΡΜΗ ΣΤΑ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ I

Σε μια περιοχή του χώρου, όπου είναι παρόντα πεδία $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{B}$, η ική πυκνότητα ενέργειας $u$ είναι

$$u = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 \qquad B = \frac{E}{c} = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}\,E \qquad u = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}(\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\,E)^2 = \epsilon_0 E^2$$

Γενικά, το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι συνάρτηση της θέσης και του χρόνου, όπως στο ημιτονοειδές κύμα.

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, όπως αυτά που έχουμε περιγράψει, είναι οδεύοντα κύματα που περιέχουν και μεταφέρουν ενέργεια από μια περιοχή σε άλλη. Μπορούμε να περιγράψουμε αυτήν τη μεταφορά ενέργειας $U$, μέσω της ενέργειας που μεταφέρεται **ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας εγκάρσιας διατομής ή της ορμής ανά μονάδα επιφάνειας**, για επιφάνεια κάθετη στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος (Σχ. 32.17).

Αυτή η ποσότητα ονομάζεται **διάνυσμα Poynting**, την εισήγαγε ο Βρετανός φυσικός John Poynting (Τζον Πόιντινγκ, 1852-1914) και ισούται με

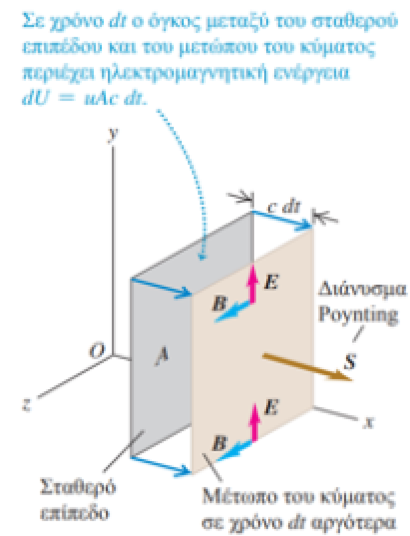
$$S = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 c E^2 \qquad \text{(στο κενό)}$$

**Διάνυσμα Poynting στο κενό**

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \qquad (32.28)$$

Ηλεκτρικό πεδίο
Μαγνητικό πεδίο
Μαγνητική σταθερά

Το διάνυσμα $\boldsymbol{S}$ δείχνει στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος (Σχ. 32.18 επόμενη διαφάνεια). Αφού τα $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο του $\boldsymbol{S}$ είναι $S = EB/\mu_0$




**32.17** Ένα μέτωπο κύματος σε χρόνο *dt*, αφού πέρασε διαμέσου του σταθερού επιπέδου με εμβαδόν $A$.

Η ολική ροή ενέργειας ανά μονάδα χρόνου (ισχύς, $P$) από κάθε κλειστή επιφάνεια είναι το ολοκλήρωμα του $\boldsymbol{S}$ πάνω στην επιφάνεια:

$$P = \oint \boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{A}$$

# ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΙ ΟΡΜΗ ΣΤΑ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ II

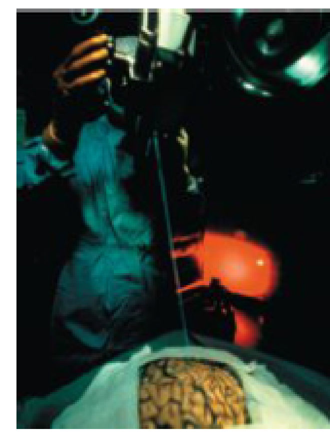
**32.18** Αυτοί οι ηλιακοί συλλέκτες οροφής είναι κεκλιμένοι, ώστε να έχουν τον Ήλιο σε κάθετη κατεύθυνση προς αυτούς – δηλαδή είναι κάθετοι προς το διάνυσμα Poynting των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από τον Ήλιο, έτσι ώστε να απορροφούν το μέγιστο ποσό ενέργειας.

Στα ημιτονοειδή κύματα καθώς επίσης και σε άλλα πιο σύνθετα κύματα, τα ηλεκτρικά και τα μαγνητικά πεδία σε κάθε σημείο μεταβάλλονται με τον χρόνο, οπότε και το διάνυσμα Poynting σε κάθε σημείο είναι επίσης συνάρτηση του χρόνου. Επειδή οι συχνότητες των τυπικών ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι πολύ υψηλές, η χρονική μεταβολή του διανύσματος Poynting είναι τόσο γρήγορη ώστε να είναι πιο πρόσφορο να κοιτάμε τη **μέση** του τιμή. Το μέτρο της χρονικής μέσης τιμής του $\boldsymbol{S}$ σε κάποιο σημείο ονομάζεται ***ένταση*** της ακτινοβολίας σε εκείνο το σημείο. Στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI) η μονάδα έντασης είναι η ίδια με αυτήν του $\boldsymbol{S}$, 1 W/m².

Ένταση ημιτονοειδούς ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό

$$\underbrace{I}_{\text{Μέτρο της μέσης τιμής του διανύσματος Poynting}} = S_{\text{av}} = \frac{\overbrace{E_{\max}}^{\text{Πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου}}\overbrace{B_{\max}}^{\text{Πλάτος του μαγνητικού πεδίου}}}{2\underbrace{\mu_0}_{\text{Μαγνητική σταθερά}}} = \frac{E_{\max}{}^2}{2\mu_0 \underbrace{c}_{\text{Ταχύτητα του φωτός στο κενό}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\overbrace{\epsilon_0}^{\text{Ηλεκτρική σταθερά}}}{\mu_0}}E_{\max}{}^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_{\max}{}^2 \qquad (32.29)$$

**ΒΙΟ Εφαρμογή Χειρουργική Λέιζερ** Τα λέιζερ χρησιμοποιούνται ευρέως στην Ιατρική ως εξαιρετικά ακριβή, αναίμακτα «νυστέρια». Μπορούν να φθάσουν και να αφαιρέσουν όγκους με ελάχιστη βλάβη στους γειτονικούς υγιείς ιστούς, όπως στην επέμβαση σε εγκέφαλο που δείχνουμε εδώ. Η τυπική ισχύς εξόδου ενός λέιζερ είναι κάτω από τα 40 W, μικρότερη από εκείνη ενός συνηθισμένου λαμπτήρα. Ωστόσο, αυτή η ισχύς είναι συγκεντρωμένη σε μια κηλίδα με διάμετρο από 0,1 mm μέχρι 2,0 mm, ώστε η ένταση του φωτός (που ισούται με τη χρονική μέση τιμή του διανύσματος Poynting) να μπορεί να φθάνει ακόμα και τα $5 \times 10^9$ W/m².



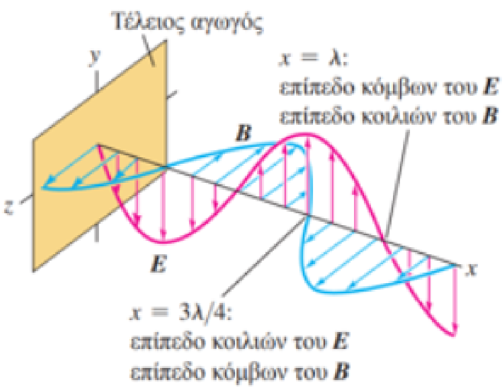
**ΠΡΟΣΟΧΗ Διάνυσμα Poynting Έναντι Έντασης** Σε κάθε σημείο $x$, το μέτρο του διανύσματος Poynting αλλάζει με τον χρόνο. Επομένως, ο στιγμιαίος ρυθμός με τον οποίο η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια ενός ημιτονοειδούς επιπέδου κύματος φθάνει σε μια επιφάνεια δεν είναι σταθερός. Αυτό μπορεί να νομίζετε ότι αντιβαίνει στην καθημερινή σας εμπειρία· το φως από τον Ήλιο, από έναν λαμπτήρα ή από το λέιζερ ενός σαρωτή στο μπακάλικο μοιάζει σταθερό και αμετάβλητο σε ισχύ. Στην πραγματικότητα, το διάνυσμα Poynting από αυτές τις πηγές **μεταβάλλεται** με τον χρόνο, αλλά η μεταβολή δεν είναι αισθητή, διότι η συχνότητα ταλάντωσης είναι υψηλή (περί τα $5 * 10^{14}$ Hz για ορατό φως). Αυτό που αισθάνεστε είναι ο **μέσος** ρυθμός με τον οποίο φθάνει στο μάτι σας η ενέργεια και γι' αυτό συνήθως χρησιμοποιούμε την ένταση (την μέση τιμή του $S$) για την περιγραφή της ισχύος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.

[ Σελίδες 1170 - 1171 ]

# ΣΤΑΣΙΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα **ανακλώνται** από την επιφάνεια ενός αγωγού (όπως ένα γυαλισμένο φύλλο μετάλλου) ή ενός διηλεκτρικού (όπως ένα φύλλο γυαλιού). Η επαλληλία ενός προσπίπτοντος κύματος και ενός ανακλώμενου σχηματίζει ένα **στάσιμο κύμα**. Η κατάσταση είναι ανάλογη με τα στάσιμα κύματα σε μια τεντωμένη χορδή, που συζητήσαμε στο Κεφ. 15. Ας υποθέσουμε ότι ένα φύλλο τέλειου αγωγού (μηδενική αντίσταση) τοποθετείται στο επίπεδο $yz$ του Σχ. 32.22 και ένα γραμμικά πολωμένο ηλεκτρομαγνητικό κύμα, που διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση $x$, πέφτει πάνω του. Το προσπίπτον κύμα επάγει ταλαντούμενα ρεύματα στην επιφάνεια του αγωγού, τα οποία δημιουργούν ένα πρόσθετο ηλεκτρικό πεδίο. Το **ολικό** ηλεκτρικό πεδίο, που είναι το διανυσματικό άθροισμα αυτού του πεδίου και του προσπίπτοντος $\boldsymbol{E}$, είναι μηδέν παντού στο εσωτερικό και στην επιφάνεια του αγωγού. Τα επαγόμενα ρεύματα στην επιφάνεια του αγωγού παράγουν επίσης ένα **ανακλώμενο** κύμα, που ταξιδεύει έξω από το επίπεδο στην κατεύθυνση $+x$. Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, το ολικό ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο είναι το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων $\boldsymbol{E}$ του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος και ομοίως για το πεδίο $\boldsymbol{B}$.

**32.22** Αναπαράσταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου ενός γραμμικά πολωμένου ηλεκτρομαγνητικού στάσιμου κύματος όταν $\omega t = 3\pi/4$ rad. Σε κάθε επίπεδο κάθετο στον άξονα $x$, το $\boldsymbol{E}$ είναι μέγιστο (κοιλία) όπου το $\boldsymbol{B}$ είναι μηδέν (κόμβος), και αντίστροφα. Καθώς περνά ο χρόνος, ο σχηματισμός δεν μετακινείται κατά μήκος του άξονα $x$· αντίθετα, σε κάθε σημείο τα διανύσματα $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{B}$ απλά ταλαντώνονται.




$$E_y(x,t) = E_{\max}[\cos(kx + \omega t) - \cos(kx - \omega t)]$$

$$B_z(x,t) = B_{\max}[-\cos(kx + \omega t) - \cos(kx - \omega t)]$$

$$E_y(x,t) = -2E_{\max}\sin kx \sin \omega t \qquad (32.34)$$

$$B_z(x,t) = -2B_{\max}\cos kx \cos \omega t \qquad (32.35)$$

Η Εξ. (32.34) είναι ανάλογη της Εξ. (15.28) για μια τεντωμένη χορδή

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \ldots \qquad \text{(επίπεδα κόμβων του } \boldsymbol{E}) \qquad (32.36)$$

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots \qquad \text{(επίπεδα κόμβων του } \boldsymbol{B}) \qquad (32.37)$$

Σε κάθε σημείο οι ημιτονοειδείς διακυμάνσεις των δύο πεδίων είναι $90^o$ εκτός φάσης.

[ Σελίδες 1175 - 1176 ]



Η. ΚΑΤΣΟΥΦΗΣ

## Στάσιμα κύματα σε μια κοιλότητα

Ας θεωρήσουμε δύο παράλληλα αγώγιμα επίπεδα σε απόσταση $L$. Ένα στάσιμο κύμα μπορεί να υπάρχει μόνο όταν το δεύτερο επίπεδο τοποθετηθεί σε μία από τις θέσεις όπου $\boldsymbol{E}(x, t) = 0$, δηλαδή το $L$ πρέπει να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $\lambda/2$. Τα μήκη κύματος που ικανοποιούν αυτήν τη συνθήκη είναι

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Οι αντίστοιχες συχνότητες είναι

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2L} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (32.39)$$

Άρα, υπάρχει ένα σύνολο **κανονικών τρόπων ταλάντωσης,** ο καθένας με μια χαρακτηριστική συχνότητα, σχήμα κύματος και σύστημα κόμβων (Σχ. 32.23). Μετρώντας τις θέσεις των κόμβων, μπορούμε να μετρήσουμε το μήκος κύματος. Αν η συχνότητα είναι γνωστή, η ταχύτητα του κύματος μπορεί να προσδιοριστεί. Αυτή η τεχνική χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Χερτς τη δεκαετία του 1880 στις πρωτοποριακές του μελέτες των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

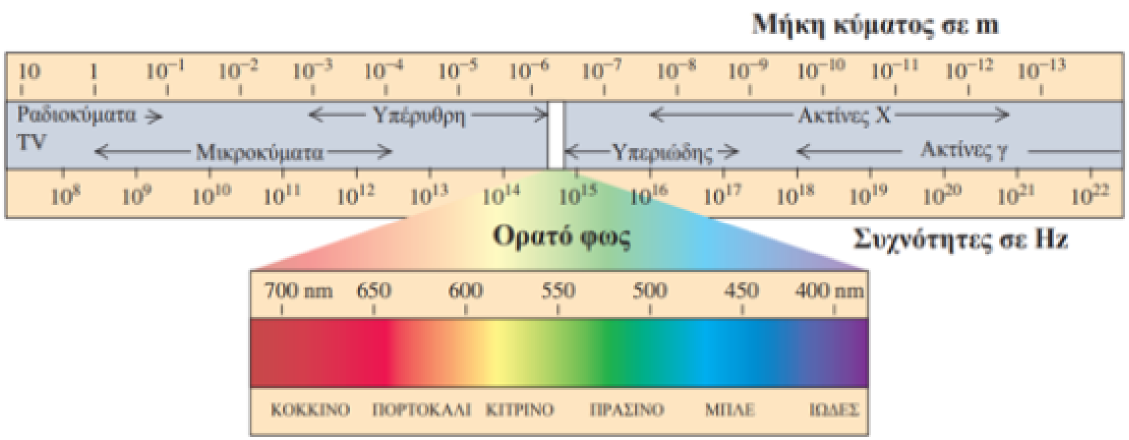
32.23 Ένας τυπικός φούρνος μικροκυμάτων δημιουργεί ένα στάσιμο ηλεκτρομαγνητικό κύμα με $\lambda$ = 12,2 cm, ένα μήκος κύματος που απορροφάται ισχυρά από το νερό των τροφών. Επειδή το κύμα έχει κόμβους σε αποστάσεις $\lambda/2$ = 6,1 cm μεταξύ τους, οι τροφές πρέπει να περιστρέφονται κατά το μαγείρεμα. Διαφορετικά, το μέρος που βρίσκεται σε έναν κόμβο –όπου το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδέν– θα παραμείνει κρύο

Αγώγιμες επιφάνειες δεν είναι οι μόνοι ανακλαστήρες ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Ανακλάσεις λαμβάνουν επίσης χώρα και σε μια διεπαφή ανάμεσα σε δύο μονωτικά υλικά με διαφορετικές διηλεκτρικές ή μαγνητικές ιδιότητες.

# Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα I

Το **ηλεκτρομαγνητικό φάσμα** περιλαμβάνει ηλεκτρομαγνητικά κύματα όλων των συχνοτήτων και μηκών κύματος. Το Σχ. 32.4 δείχνει κατά προσέγγιση τις περιοχές μηκών κύματος και συχνοτήτων για το τμήμα του φάσματος που συναντάμε πιο συχνά. Παρά τις τεράστιες διαφορές στις χρήσεις τους και στους τρόπους παραγωγής τους, όλα αυτά είναι ηλεκτρομαγνητικά κύματα με την ίδια ταχύτητα διάδοσης (στο κενό) $c$ = 299 792 458 m/s. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μπορεί να διαφέρουν ως προς τη συχνότητα $f$ και το μήκος κύματος $\lambda$, αλλά η σχέση $c = \lambda f$ στο κενό ισχύει για όλα.

**32.4** Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα. Οι συχνότητες και τα μήκη κύματος που υπάρχουν στη φύση εκτείνονται σε τόσο μεγάλο εύρος που κάνει αναγκαία τη χρήση λογαριθμικής κλίμακας για να δείξουμε όλες τις ενδιαφέρουσες ζώνες. Τα όρια των ζωνών είναι κάπως αυθαίρετα.




Μόνο ένα πολύ μικρό τμήμα του φάσματος είναι αντιληπτό σε εμάς μέσω της αίσθησης της όρασης. Ονομάζουμε αυτό το τμήμα **ορατό φως**. Τα μήκη κύματός του εκτείνονται από περίπου 380 nm μέχρι 750 nm (380 $\times$ $10^{-9}$ m μέχρι 750 $\times$ $10^{-9}$ m), με αντίστοιχες συχνότητες από περίπου 790 THz μέχρι 400 THz (7,9 $\times$ $10^{14}$ Hz μέχρι 4,0 $\times$ $10^{14}$ Hz). Διαφορετικές περιοχές του ορατού φάσματος προκαλούν στον άνθρωπο την αίσθηση διαφορετικών χρωμάτων.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 32.1** **Μήκη Κύματος του Ορατού Φάσματος**

| | |
|---|---|
| (380-450) nm | Ιώδες |
| (450-495) nm | Κυανό |
| (495-570) nm | Πράσινο |
| (570-590) nm | Κίτρινο |
| (590-620) nm | Πορτοκαλόχρωμο |
| (620-750) nm | Ερυθρό |

# Σημείωση

- Μέρος από τις διαφάνειες είναι από τις διαφάνειες διδασκαλίας του βιβλίου Πανεπιστημιακή Φυσική με Σύγχρονη Φυσική, Τόμος Β, H. D. Young and R. A. Freedman, 3η Ελληνική Έκδοση, Εκδόσεις Παπαζήση.