ΦΥΣΙΚΗ: ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

Ε.Ε. 2023-2024

Διδάσκοντες: Σ. ΚΟΣΙΩΝΗΣ, Ε. ΠΑΣΠΑΛΑΚΗΣ, και <u>Ι. ΘΑΝΟΠΟΥΛΟΣ</u>

SEARS & ZEMANSKY

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΦΥΣΙΚΗ με Σύγχρονη Φυσική

4η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ

ΜΕ QR CODE ΒΙΝΤΕΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Τόμος Β

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ
ΟΠΤΙΚΗ - ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ

YOUNG ΚΑΙ FREEDMAN

ΑΠΟΔΟΣΗ – ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Θ. Η. Αλεξόπουλος
Ι. Α. Αρβανιτίδης
Α. Α. Αργυρίου
Ε. Α. Δρης
Η. Σ. Ζουμπούλης
Η. Κ. Κατσούφης
Γ. Α. Κουρούκλης
Κ. Ε. Παρασκευαΐδης
Μ. Ν. Πιζάνιας
Ι. Π. Ρίζος
Θ. Ν. Τομαράς
Κ. Χριστοδουλίδης

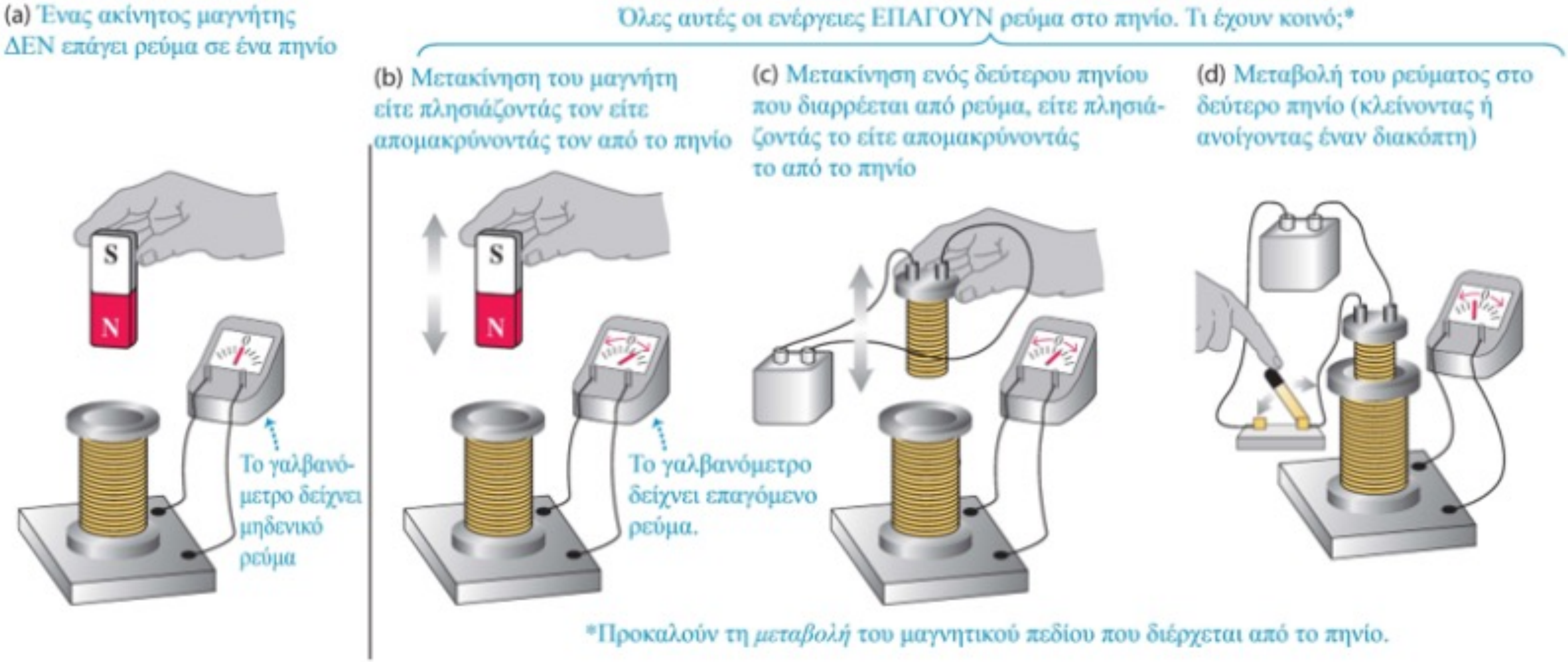
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΠΑΖΗΣΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 29

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

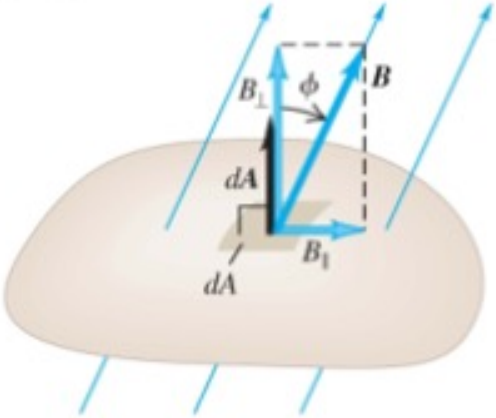
29.1 Ανάδειξη του φαινομένου του επαγόμενου ρεύματος.



ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ FARADAY

Το κοινό χαρακτηριστικό όλων των φαινομένων επαγωγής είναι η μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή μέσα από ένα κύκλωμα.

29.3 Υπολογισμός της μαγνητικής ροής που διέρχεται μέσα από μια στοιχειώδη επιφάνεια.



Μαγνητική ροή που διέρχεται μέσα από μια στοιχειώδη επιφάνεια $d\boldsymbol{A}$:
$d\Phi_B = \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = B_\perp dA = B\, dA \cos\phi$

$$d\Phi_B = \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = B_\perp\, dA = B\, dA \cos\phi$$

$$\Phi_B = \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = \int B\, dA \cos\phi \qquad (29.1)$$

Νόμος του Faraday:
Η επαγόμενη ΗΕΔ σε έναν κλειστό βρόχο... $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$ ... ισούται με το αντίθετο του χρονικού ρυθμού μεταβολής της μαγνητικής ροής μέσα από τον βρόχο. (29.3)

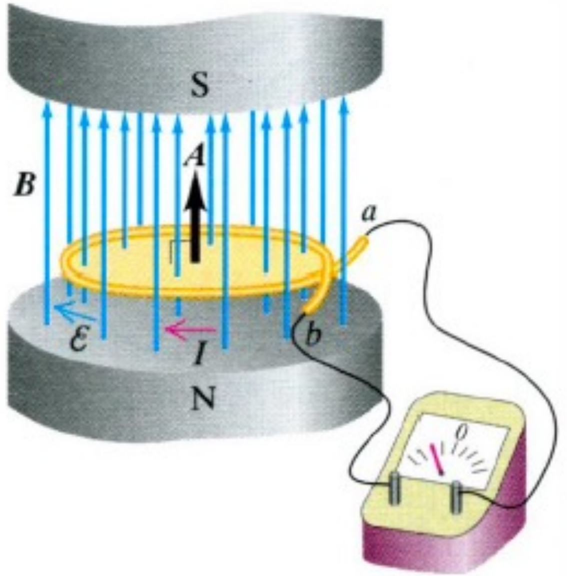
Αν έχουμε ένα πηνίο με N πανομοιότυπες σπείρες και η ροή που διέρχεται από κάθε σπείρα μεταβάλλεται με τον ίδιο ρυθμό, τότε ο *ολικός* ρυθμός μεταβολής από όλες τις σπείρες είναι N φορές μεγαλύτερος από τον ρυθμό μεταβολής για τη μία σπείρα. Αν Φ_B είναι η ροή που διαπερνά κάθε σπείρα, η ολική ΗΕΔ σε ένα πηνίο με N σπείρες είναι

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (29.4)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ρεύμα που επάγεται σε βρόχο Στο Σχ. 30–3 το μαγνητικό πεδίο ανάμεσα στους πόλους του ηλεκτρομαγνήτη είναι ομογενές σε κάθε χρονική στιγμή, αλλά αυξάνει με ρυθμό 0,020 T/s. Η επιφάνεια του αγώγιμου βρόχου μέσα στο πεδίο είναι 120 cm^2 και η ολική αντίσταση του κυκλώματος, μαζί με το γαλβανόμετρο και τον αντιστάτη, είναι 5,0 Ω. Να βρεθεί η επαγόμενη ΗΕΔ, καθώς και το επαγόμενο ρεύμα στο κύκλωμα.

ΛΥΣΗ Η επιφάνεια $A = 0{,}012\ m^2$ είναι σταθερή, άρα ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής είναι το γινόμενο



30–3 Ακίνητος αγώγιμος βρόχος σε αυξανόμενο μαγνητικό πεδίο.

της A επί τον ρυθμό μεταβολής του μαγνητικού πεδίου B:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{dB}{dt}A = (0{,}020\ \mathrm{T/s})(0{,}012\ \mathrm{m^2})$$
$$= 2{,}4 \times 10^{-4}\ \mathrm{V} = 0{,}24\ \mathrm{mV}.$$

Αυτή είναι η επαγόμενη ΗΕΔ $\mathcal{E}$, αφήνοντας κατά μέρος το πρόσημο που δεν έχουμε μελετήσει ακόμη.

Αξίζει να επαναβεβαιώσουμε τη συνέπεια μονάδων στον υπολογισμό αυτόν. Υπάρχουν πολλοί τρόποι να το κάνουμε αυτό· ένας τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι από την έκφραση για τη μαγνητική δύναμη $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ έχουμε 1 T = (1 N)/(1 C · m/s). Μπορούμε επομένως να εκφράσουμε τη μονάδα της μαγνητικής ροής ως (1 T)(1 m^2) = 1 N · s · m/C, και του ρυθμού μεταβολής της μαγνητικής ροής ως 1 N · m/C = 1 J/C = 1 V. Άρα η μονάδα της ποσότητας $d\Phi_B/dt$ είναι το volt,

Επίσης, θυμηθείτε ότι η μονάδα της μαγνητικής ροής είναι 1 T · m^2 = 1 Wb και άρα 1 V = 1 Wb/s.

Τελικά, το επαγόμενο στο κύκλωμα ρεύμα I είναι

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{2{,}4 \times 10^{-4}\ \mathrm{V}}{5{,}0\ \Omega} = 4{,}8 \times 10^{-5}\ \mathrm{A} = 0{,}048\ \mathrm{mA}.$$

Ακόμη δεν έχουμε βρει τη φορά του ρεύματος. Αυτό θα είναι το επόμενό μας βήμα.

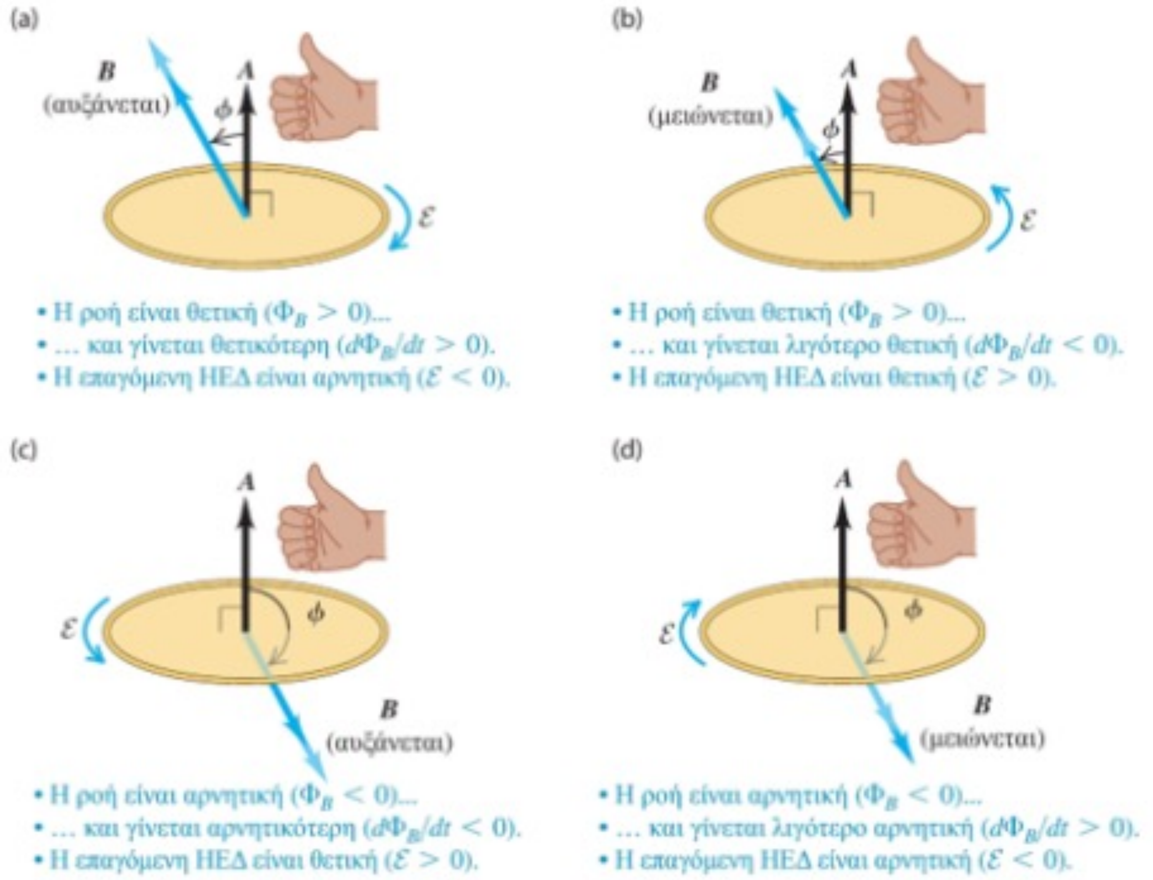
https://videos.papazissi.gr/EX29_1/

Φορά της επαγόμενης ΗΕΔ

Μπορείτε να βρείτε τη φορά μιας επαγόμενης ΗΕΔ ή ενός επαγόμενου ρεύματος, χρησιμοποιώντας την Εξ. (29.3) μαζί με ορισμένους κανόνες προσήμου, με τον εξής τρόπο:

1. Ορίζετε μια θετική κατεύθυνση του διανύσματος επιφάνειας $\boldsymbol{A}$.
2. Από τις κατευθύνσεις του $\boldsymbol{A}$ και του μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B}$ καθορίζετε το πρόσημο της μαγνητικής ροής Φ_B και του ρυθμού μεταβολής της $d\Phi_B/dt$. Το **Σχ. 29.6** δείχνει μερικά παραδείγματα.

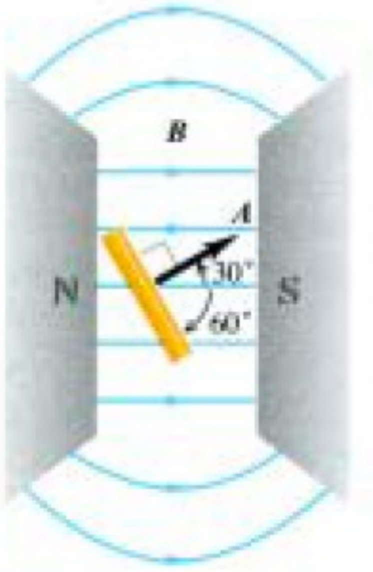
29.6 Η μαγνητική ροή είναι (a) θετική και αυξάνεται, (b) θετική και μειώνεται, (c) αρνητική και μειώνεται και (d) αρνητική και αυξάνεται. Συνεπώς, η Φ_B αυξάνεται στις περιπτώσεις (a) και (d), και μειώνεται στις (b) και (c). Στις (a) και (d) οι ΗΕΔ είναι αρνητικές (η φορά τους είναι αντίθετη από τη φορά των λυγισμένων δαχτύλων του δεξιού σας χεριού όταν ο αντίχειράς σας δείχνει στην κατεύθυνση του $\boldsymbol{A}$). Στις (b) και (c) οι ΗΕΔ είναι θετικές (η φορά τους είναι η ίδια με τη φορά των λυγισμένων δαχτύλων).



Λυγίστε τα δάχτυλα του δεξιού σας χεριού γύρω από το διάνυσμα **A** έχοντας τον δεξιό αντίχειρα στην κατεύθυνση του **A**. Αν η φορά μιας ΗΕΔ ή ενός ρεύματος στο κύκλωμα είναι η ίδια με τη φορά που ακολούθησαν τα δάχτυλά σας, τότε είναι θετική, ενώ αν έχει την αντίθετη φορά είναι αρνητική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένα πηνίο που αποτελείται από 500 κυκλικούς βρόχους σύρματος με ακτίνα 4,00 cm είναι τοποθετημένο ανάμεσα στους πόλους ενός μεγάλου ηλεκτρομαγνήτη· το μαγνητικό πεδίο είναι σταθερό με κατεύθυνση 60° από το επίπεδο του πηνίου (Σχ. 30–5). Το πεδίο ελαττώνεται με ρυθμό 0,200 T/s. Να βρεθεί η απόλυτη τιμή της επαγόμενης ΗΕΔ.



30–5 Το μέτρο του B μειώνεται. Με την κατεύθυνση που έχει το A, η ροή που διαπερνά το πηνίο ελαττώνεται με αποτέλεσμα η $\mathcal{E}$ να είναι θετική. Αυτό αντιστοιχεί σε ΗΕΔ και σε ρεύμα που έχει φορά αυτήν των δεικτών του ρολογιού για παρατήρηση από τα αριστερά κατά την κατεύθυνση του A. Το πρόσθετο πεδίο B που προκαλείται από το επαγόμενο ρεύμα τείνει να αντισταθμίσει τη μείωση της ροής.

ΛΥΣΗ Διαλέξτε για το A την κατεύθυνση που έχει στο Σχ. 30–5. Τότε ϕ είναι η γωνία μεταξύ των A και B. Η ροή Φ_B σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι $\Phi_B = BA\cos\phi$, και ο ρυθμός μεταβολής της ροής είναι $d\Phi_B/dt = (dB/dt)A\cos\phi$. Στην περίπτωση αυτή $dB/dt = -0{,}200$ T/s, $A = \pi\,(0{,}0400\ \text{m})^2 = 0{,}00503\ \text{m}^2$, $\phi = 30°$ (*και όχι* 60°), και

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_B}{dt} &= \frac{dB}{dt}A\cos 30° \\ &= (-0{,}200\ \text{T/s})(0{,}00503\ \text{m}^2)(0{,}866) \\ &= -0{,}000871\ \text{T}\cdot\text{m}^2/\text{s} = -0{,}000871\ \text{Wb/s}.\end{aligned}$$

η επαγόμενη ΗΕΔ είναι

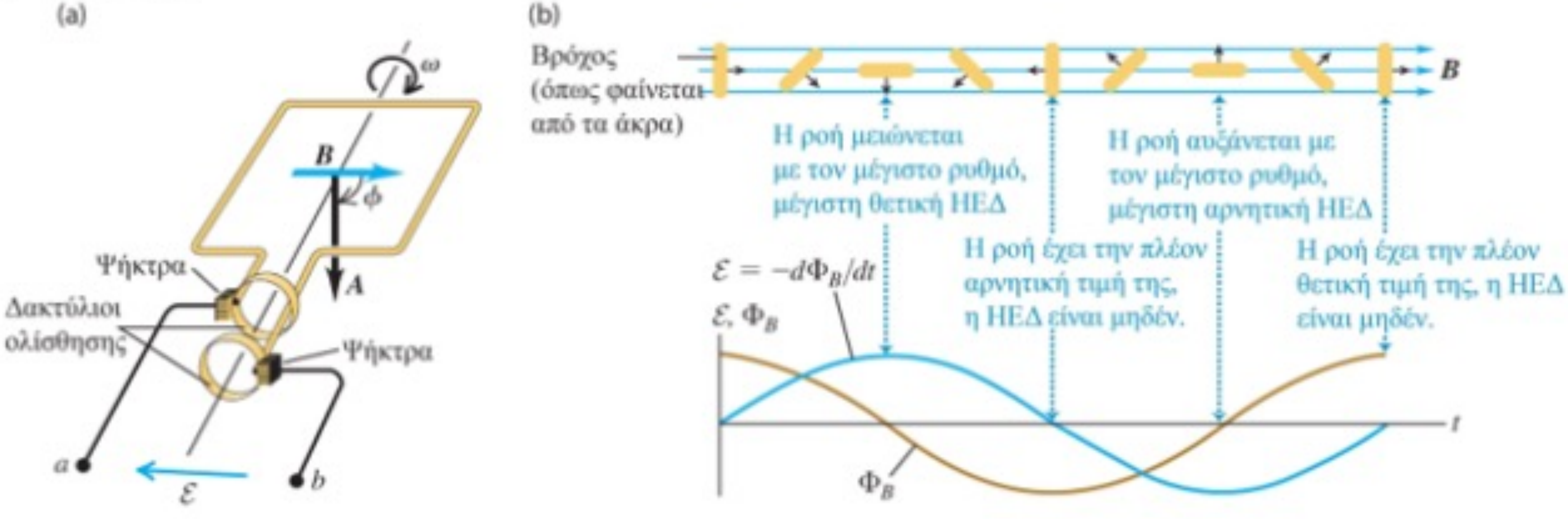
$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -N\frac{d\Phi_B}{dt} \\ &= -(500)(-0{,}000871\ \text{Wb/s}) \\ &= 0{,}435\ \text{V}.\end{aligned}$$

Όταν παρατηρούμε από τα αριστερά, προς την κατεύθυνση του διανύσματος της επιφάνειας (30° πάνω από το μαγνητικό πεδίο B), η θετική φορά για την $\mathcal{E}$ είναι η φορά των δεικτών του ρολογιού, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Η ΗΕΔ είναι θετική και άρα έχει τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Αν τα άκρα του σύρματος συνδεθούν με έναν αντιστάτη, η φορά του ρεύματος στο πηνίο έχει επίσης τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Ένα τέτοιο ρεύμα δίνει πρόσθετη μαγνητική ροή μέσα από το πηνίο στην ίδια κατεύθυνση με τη ροή από τον ηλεκτρομαγνήτη και άρα τείνει να αντιτεθεί στη μείωση της ολικής ροής.

https://videos.papazissi.gr/EX29_2/

Σχηματικό διάγραμμα ενός απλού εναλλάκτη

29.8 (a) Σχηματικό διάγραμμα ενός απλού εναλλάκτη. Ένας αγώγιμος βρόχος περιστρέφεται μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο παράγοντας μια ΗΕΔ. Το κάθε άκρο του βρόχου συνδέεται με το εξωτερικό κύκλωμα μέσω του αντίστοιχου δακτυλίου ολίσθησης. Το σύστημα παρουσιάζεται τη χρονική στιγμή που η γωνία είναι $\phi = \omega t = 90°$. (b) Γραφική παράσταση της ροής μέσα από τον βρόχο καθώς και της επαγόμενης ΗΕΔ στα άκρα a και b, που συνοδεύονται από τους αντίστοιχους προσανατολισμούς του βρόχου κατά τη διάρκεια μιας πλήρους περιστροφής.



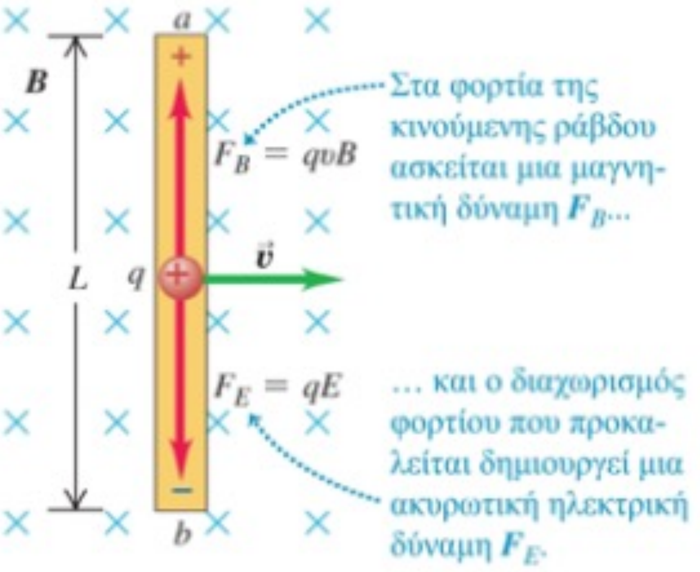
29.9 Ένας εναλλάκτης για εμπορική χρήση χρησιμοποιεί πολλές σπείρες σύρματος που έχουν περιελιχθεί σε ένα κατασκεύασμα το οποίο μοιάζει με βαρέλι και ονομάζεται οπλισμός. Ο οπλισμός και το σύρμα παραμένουν ακίνητα καθώς οι ηλεκτρομαγνήτες περιστρέφονται γύρω από έναν άξονα (δεν φαίνεται στο σχήμα) που περνάει από το κέντρο του οπλισμού. Η επαγόμενη ΗΕΔ που προκύπτει είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτήν που θα έδινε ένας μονός συρμάτινος βρόχος.

https://videos.papazissi.gr/EX29_3/

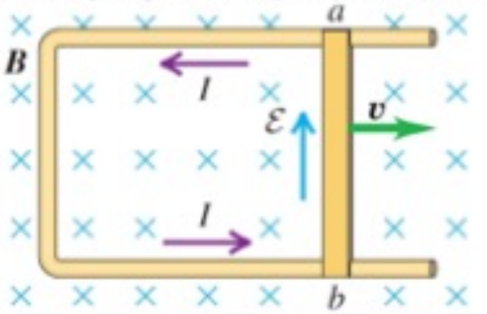
ΗΛΕΚΤΡΕΓΕΡΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΛΟΓΩ ΚΙΝΗΣΗΣ

29.15 Μια αγώγιμη ράβδος κινείται μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο.
(a) Η ράβδος, η ταχύτητα και το πεδίο είναι κάθετα μεταξύ τους.
(b) Φορά του επαγόμενου ρεύματος στο κύκλωμα.

(a) Απομονωμένη κινούμενη ράβδος



(b) Ράβδος συνδεδεμένη σε έναν ακίνητο αγωγό



Η κινητική ΗΕΔ $\mathcal{E}$ στην κινούμενη ράβδο δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο στον ακίνητο αγωγό.

https://videos.papazissi.gr/EX29_5/

$$V_{ab} = EL = vBL \tag{29.5}$$

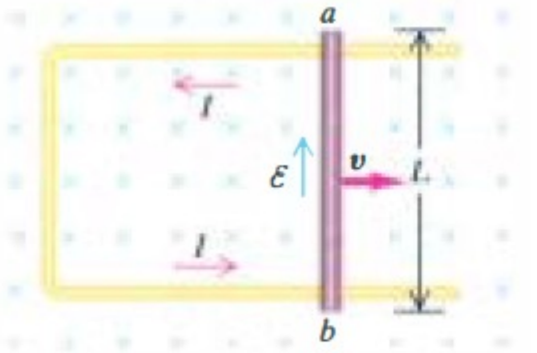
ΗΕΔ λόγω κίνησης, διεύθυνση του αγωγού και ταχύτητα κάθετα σε ομογενές B

$$\mathcal{E} = vBL \tag{29.6}$$

Ταχύτητα του αγωγού
Μήκος του αγωγού
Μέτρο του ομογενούς μαγνητικού πεδίου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

https://videos.papazissi.gr/EX29_9/



Έστω ότι το μήκος L είναι 0,10 m, η ταχύτητα v 2,5 m/s, η ολική αντίσταση του βρόχου 0,030 Ω και το B 0,60 T. Να βρεθεί η $\mathcal{E}$, το επαγόμενο ρεύμα, η δύναμη που ασκείται στη ράβδο και η μηχανική ισχύς που απαιτείται για να διατηρεί τη ράβδο σε κίνηση.

ΛΥΣΗ η ΗΕΔ, $\mathcal{E}$, είναι

$$\mathcal{E} = vBL = (2{,}5 \text{ m/s})\,(0{,}60 \text{ T})(0{,}10 \text{ m}) = 0{,}15 \text{ V}.$$

Το ρεύμα I στον βρόχο είναι

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{0{,}15 \text{ V}}{0{,}030\,\Omega} = 5{,}0 \text{ A}.$$

Εξαιτίας αυτού του ρεύματος, ασκείται δύναμη F στη ράβδο με κατεύθυνση *αντίθετη* στην κίνησή της. το μέτρο αυτής της δύναμης

$$F = ILB = (5{,}0 \text{ A})(0{,}10 \text{ m})\,(0{,}60 \text{ T}) = 0{,}30 \text{ N}.$$

Για να διατηρηθεί η κίνηση της ράβδου με σταθερή ταχύτητα, παρά την ύπαρξη αυτής της δύναμης που αντιδρά, πρέπει να ασκηθεί επιπρόσθετη δύναμη, ίση σε μέτρο και αντίθετη σε κατεύθυνση. Ο ρυθμός με τον οποίο παράγει έργο αυτή η επιπρόσθετη δύναμη είναι η ισχύς P που απαιτείται για να διατηρηθεί η κίνηση της ράβδου:

$$P = Fv = (0{,}30 \text{ N})(2{,}5 \text{ m/s}) = 0{,}75 \text{ W}.$$

Ο ρυθμός με τον οποίο η επαγόμενη ΗΕΔ προσφέρει ηλεκτρική ενέργεια στο κύκλωμα είναι το γινόμενο $\mathcal{E}I$:

$$P = \mathcal{E}I = (0{,}15 \text{ V})(5{,}0 \text{ A}) = 0{,}75 \text{ W}.$$

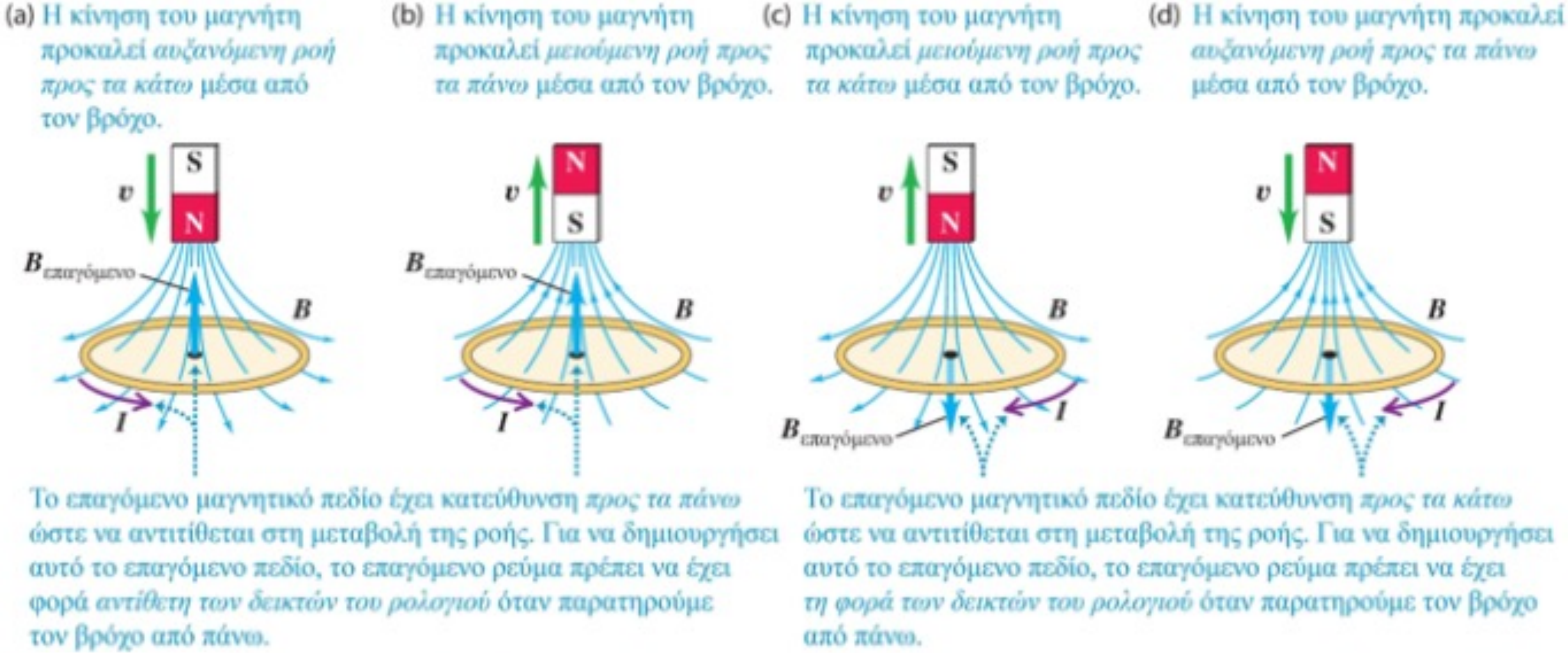
Αυτή, όπως είναι αναμενόμενο, ισούται με την παρεχόμενη μηχανική ισχύ, Fv. Το σύστημα μετατρέπει μηχανική ενέργεια (έργο) σε ηλεκτρική ενέργεια. Τελικά, ο ρυθμός απώλειας ηλεκτρικής ενέργειας στην αντίσταση του κυκλώματος είναι $P = I^2R = (5{,}0 \text{ A})^2(0{,}030\ \Omega) = 0{,}75$ W, κάτι που είναι επίσης αναμενόμενο.

ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ LENZ

Η φορά οποιουδήποτε φαινομένου μαγνητικής επαγωγής είναι τέτοια ώστε να αντιτίθεται στο αίτιο που το προκάλεσε.

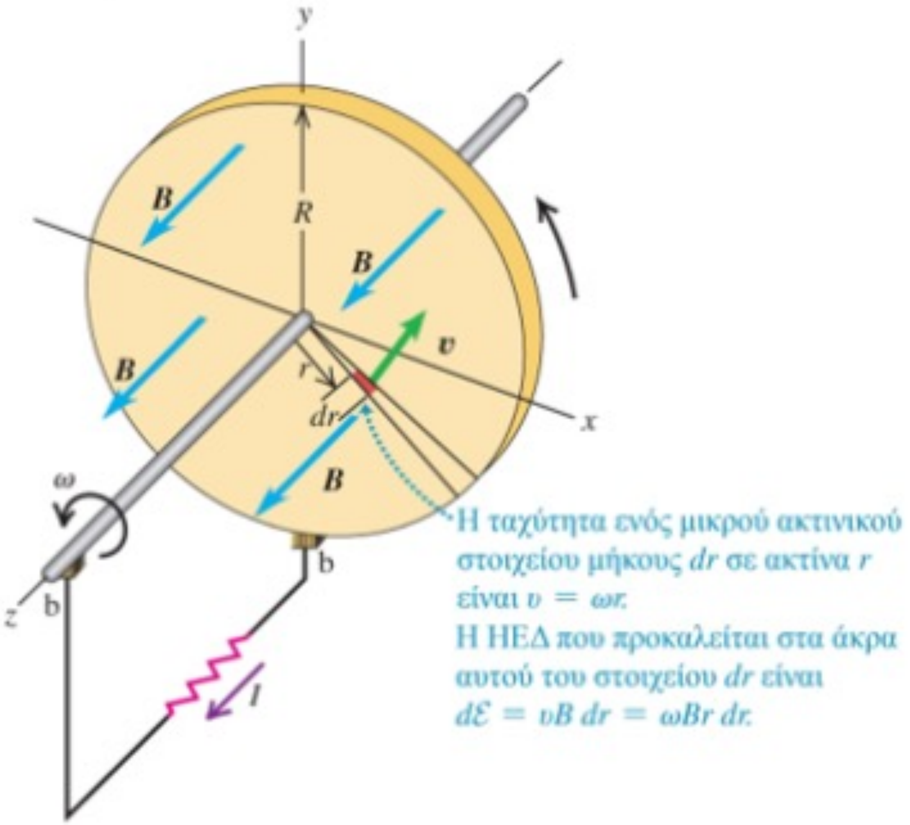
Παραδείγματα εφαρμογής του νόμου του Lenz

29.14 Φορές των επαγόμενων ρευμάτων καθώς ένας ραβδόμορφος μαγνήτης κινείται κατά μήκος του άξονα ενός αγώγιμου βρόχου. Αν ο μαγνήτης είναι ακίνητος, δεν υπάρχει επαγόμενο ρεύμα.



Το δυναμό του δίσκου του Faraday

29.17 Ένας αγώγιμος δίσκος με ακτίνα R περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$. Η ΗΕΔ επάγεται κατά μήκος ακτινικών γραμμών του δίσκου και εφαρμόζεται σε εξωτερικό κύκλωμα με δύο ολισθαίνουσες επαφές που σημειώνονται με b.

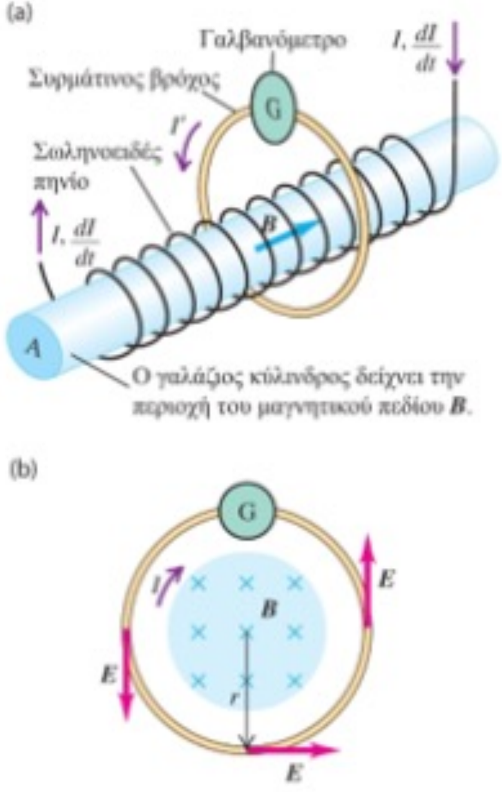


$$\mathcal{E} = \int_0^R \omega Br\,dr = \tfrac{1}{2}\omega BR^2$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν τη συσκευή ως πηγή ΗΕΔ σε ένα κύκλωμα αν το συμπληρώσουμε με δύο επαφές (σημειώνονται με b στο σχήμα) που συνδέουν τον δίσκο με τον άξονα όπως δείχνει το σχήμα. Ένας τέτοιος δίσκος ονομάζεται δυναμό του δίσκου Faraday ή ομοπολική γεννήτρια. Σε αντίθεση με τον εναλλάκτη το δυναμό του δίσκου Faraday είναι μια γεννήτρια συνεχούς ρεύματος· παράγει μία ΗΕΔ που είναι σταθερή στον χρόνο.

ΕΠΑΓΟΜΕΝΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

29.18 (a) Οι σπείρες ενός μακριού σωληνοειδούς πηνίου φέρουν ένα ρεύμα I που αυξάνεται με ρυθμό dI/dt. Η μαγνητική ροή στο σωληνοειδές αυξάνεται με ρυθμό $d\Phi_B/dt$ και αυτή η μεταβαλλόμενη ροή περνά από έναν συρμάτινο βρόχο. Μια ΗΕΔ $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$ επάγεται στον βρόχο, η οποία προκαλεί ένα ρεύμα I' που το μετρά το γαλβανόμετρο G.
(b) Τομή στο επίπεδο του βρόχου.



Η μαγνητική ροή μέσα από τον βρόχο είναι

$$\Phi_B = BA = \mu_0 n I A$$

Η επαγόμενη ΗΕΔ στον βρόχο είναι (νόμος του Faraday)

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 n A \frac{dI}{dt} \qquad (29.8)$$

Ποια *δύναμη* όμως κινεί τα φορτία στον συρμάτινο βρόχο; Δεν μπορεί να είναι μια μαγνητική δύναμη, επειδή ο αγωγός δεν βρίσκεται *μέσα* σε ένα μαγνητικό πεδίο. Είμαστε αναγκασμένοι να συμπεράνουμε ότι πρέπει να υπάρχει ένα **επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο** στον αγωγό που *προκαλείται* από τη *μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή*. Τα επαγόμενα ηλεκτρικά πεδία είναι *πολύ* διαφορετικά από τα ηλεκτρικά πεδία που προκαλούνται από τα φορτία, τα οποία συζητήσαμε στο Κεφ. 23. Για να το δείτε αυτό, σημειώστε ότι, όταν ένα φορτίο q κάνει μια πλήρη περιφορά στον βρόχο, το ολικό έργο που παράγεται σε αυτό από το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να είναι ίσο με το γινόμενο του q επί την ΗΕΔ $\mathcal{E}$. Δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο στον βρόχο *δεν είναι διατηρητικό*,

επειδή το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\boldsymbol{E}$ γύρω από μια κλειστή διαδρομή δεν είναι μηδέν.

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \mathcal{E} \qquad (29.9)$$

Νόμος του Faraday για μια στατική διαδρομή ολοκλήρωσης:

$$\underbrace{\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}}_{\text{Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του ηλεκτρικού πεδίου σε όλη τη διαδρομή}} = \underbrace{-\frac{d\Phi_B}{dt}}_{\text{Αντίθετο του ρυθμού μεταβολής με τον χρόνο της μαγνητικής ροής μέσα στη διαδρομή}} \qquad (29.10)$$

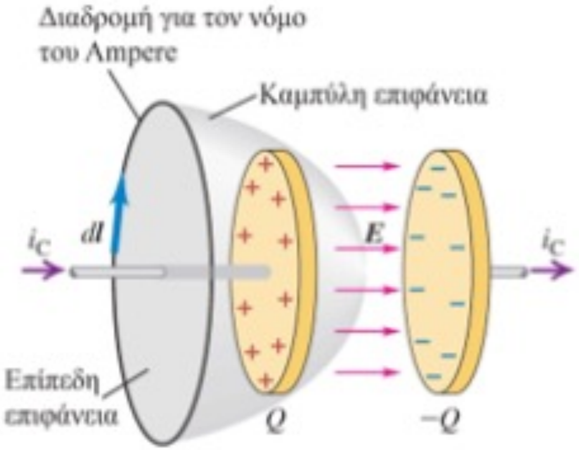
(η μορφή 29.10 ισχύει μόνον αν η διαδρομή της ολοκλήρωσης είναι στατική) δεν έχει νόημα η έννοια του *δυναμικού* για ένα τέτοιο πεδίο, και το ονομάζουμε **μη ηλεκτροστατικό πεδίο**. Αντιθέτως, ένα ηλεκτρο*στατικό* πεδίο είναι *πάντα* διατηρητικό, και πάντα σχετίζεται με μια αντίστοιχη συνάρτηση δυναμικού. Παρά τη διαφορά αυτή, η θεμελιώδης επίδραση *οποιουδήποτε* ηλεκτρικού πεδίου είναι να ασκεί δύναμη $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ σε φορτίο q. Η σχέση αυτή ισχύει είτε το $\boldsymbol{E}$ είναι διατηρητικό πεδίο που δημιουργείται από κατανομή φορτίου, είτε είναι μη διατηρητικό πεδίο που παράγεται από μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή.

Έτσι, ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο λειτουργεί σαν πηγή ηλεκτρικού πεδίου, τέτοιου είδους όμως που *δεν μπορούμε* να δημιουργήσουμε με καμιά στατική κατανομή φορτίου.

ΡΕΥΜΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ MAXWELL

Γενίκευση του νόμου του Ampere

29.22 Φόρτιση πυκνωτή παράλληλων πλακών (οπλισμών). Το ρεύμα αγωγιμότητας μέσω της επίπεδης επιφάνειας είναι i_C, δεν υπάρχει όμως ρεύμα αγωγιμότητας μεταξύ των οπλισμών μέσω της διογκωμένης (καμπύλης) επιφάνειας. Οι δύο επιφάνειες έχουν κοινό όριο, έτσι η διαφορά αυτή στο I_{encl} οδηγεί σε μια προφανή αντίφαση στην εφαρμογή του νόμου του Ampere.



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encl}$$

Με λίγη φαντασία στο σημείο αυτό, επινοούμε ένα υποθετικό **ρεύμα μετατόπισης** i_D στον χώρο ανάμεσα στις πλάκες, που ορίζεται ως

$$i_D = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (29.14)$$

Ρεύμα μετατόπισης μέσα από μια επιφάνεια

Επιτρεπτότητα του υλικού στην επιφάνεια

Ρυθμός μεταβολής με τον χρόνο της ηλεκτρικής ροής μέσα από την επιφάνεια

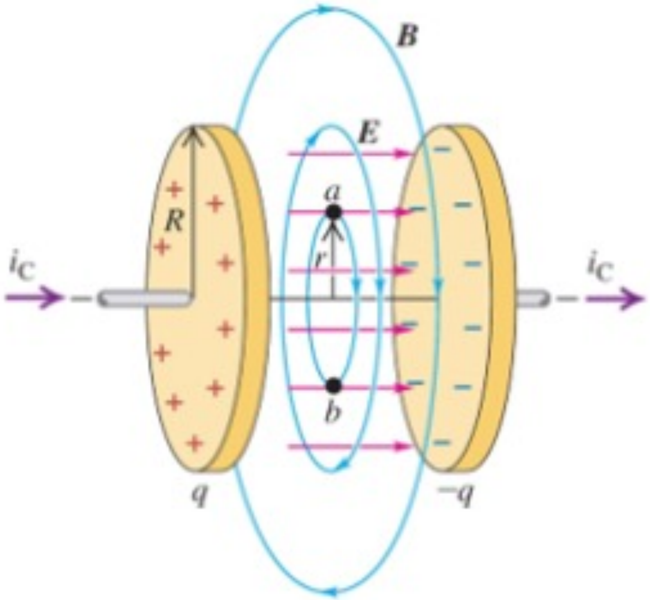
Δηλαδή φανταζόμαστε ότι η μεταβαλλόμενη ροή μέσω της καμπύλης (διογκωμένης) επιφάνειας στο Σχ. 29.22 είναι ισοδύναμη, σε ό,τι αφορά τον νόμο του Ampere, με ένα ρεύμα αγωγιμότητας μέσω της επιφάνειας. Συμπεριλαμβάνουμε αυτό το υποθετικό ρεύμα στον νόμο του Ampere μαζί με το πραγματικό ρεύμα αγωγιμότητας i_C:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_C + i_D)_{encl} \quad \text{(γενικευμένος νόμος του Ampere)} \qquad (29.15)$$

Το υποθετικό ρεύμα i_D το επινόησε το 1865 ο Σκοτσέζος Φυσικός James Clerk Maxwell (Τζέιμς Κλερκ Μάξγουελ, 1831-1879).

Η πραγματικότητα του ρεύματος μετατόπισης

29.23 Ένας πυκνωτής που φορτίζεται από το ρεύμα αγωγιμότητας i_C έχει ένα ρεύμα μετατόπισης ανάμεσα στις πλάκες του ίσο με το i_C, με πυκνότητα ρεύματος μετατόπισης $j_D = \epsilon dE/dt$. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως η πηγή του μαγνητικού πεδίου ανάμεσα στις πλάκες του πυκνωτή.



Το ολοκλήρωμα $\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l}$ στον νόμο του Ampere είναι απλώς το B επί το μήκος της περιφέρειας του κύκλου $2\pi r$, και επειδή $i_D = i_C$, όσο φορτίζεται ο πυκνωτής ο νόμος του Ampere γίνεται

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = 2\pi r B = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} i_C \qquad \text{ή}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} i_C \qquad (29.17)$$

Ένας παρόμοιος υπολογισμός δείχνει ότι *εξωτερικά* του χώρου μεταξύ των οπλισμών (δηλαδή για $r > R$) το $\boldsymbol{B}$ είναι ίδιο με εκείνο που θα υπήρχε αν οι αγωγοί ήταν συνεχείς και δεν υπήρχαν καθόλου οπλισμοί.

Όταν *μετράμε* το μαγνητικό πεδίο σε αυτήν την περιοχή, βρίσκουμε ότι αυτό είναι πράγματι εκεί και ότι συμπεριφέρεται ακριβώς όπως προβλέπει η Εξ. (29.17). Αυτό επαληθεύει απευθείας τον ρόλο του ρεύματος μετατόπισης ως πηγή μαγνητικού πεδίου.

Οι εξισώσεις του Maxwell για τον Ηλεκτρομαγνητισμό

Είμαστε τώρα σε θέση να συλλέξουμε σε ένα κομψό πακέτο *όλες* τις σχέσεις μεταξύ των ηλεκτρικών και των μαγνητικών πεδίων, καθώς και των πηγών τους. Το πακέτο αυτό περιλαμβάνει τέσσερις εξισώσεις που ονομάζονται **εξισώσεις του Maxwell**. Ο Maxwell δεν ανακάλυψε όλες αυτές τις εξισώσεις μόνος του (αν και ανέπτυξε την έννοια του ρεύματος μετατόπισης). Τις διατύπωσε όμως ως ενιαίο σύνολο και αναγνώρισε τη σπουδαιότητά τους, ιδιαίτερα με την πρόβλεψη της ύπαρξης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Προς το παρόν θα διατυπώσουμε τις εξισώσεις του Maxwell στην πιο απλή μορφή τους, για την περίπτωση όπου υπάρχουν φορτία και ρεύματα στον κατά τα άλλα κενό χώρο.

Νόμος του Gauss για το *E*:

$$\underbrace{\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}}_{\text{Ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσα από μια κλειστή επιφάνεια}} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0} \qquad (29.18)$$

Q_{encl}: Φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια
ϵ_0: Επιτρεπτότητα του κενού

Νόμος του Gauss για το *B*:

$$\underbrace{\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}}_{\text{Ροή του μαγνητικού πεδίου μέσα από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια...}} = 0 \qquad (29.19)$$

0: ... ισούται με μηδέν.

Νόμος του Faraday για μια σταθερή κλειστή διαδρομή ολοκλήρωσης:

$$\underbrace{\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}}_{\text{Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του ηλεκτρικού πεδίου σε κλειστή διαδρομή}} = \underbrace{-\frac{d\Phi_B}{dt}}_{\text{Αντίθετο του ρυθμού μεταβολής με τον χρόνο της μαγνητικής ροής μέσα από τη διαδρομή}} \qquad (29.20)$$

Νόμος του Ampere για μια σταθερή κλειστή διαδρομή ολοκλήρωσης:

$$\underbrace{\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l}}_{\text{Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου σε όλη τη διαδρομή}} = \mu_0 \left(i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{\text{encl}} \qquad (29.21)$$

μ_0: Διαπερατότητα του κενού
i_C: Ρεύμα αγωγιμότητας μέσα από τη διαδρομή
ϵ_0: Επιτρεπτότητα του κενού
$\frac{d\Phi_E}{dt}$: Ρυθμός μεταβολής με τον χρόνο της ηλεκτρικής ροής μέσα από τη διαδρομή
$\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$: Ρεύμα μετατόπισης μέσα από τη διαδρομή

Συμμετρία των ΕξισώσεωνMaxwell

29.24 Οι εξισώσεις του Maxwell στο κενό είναι εξαιρετικά συμμετρικές.

Στο κενό δεν υπάρχουν φορτία, άρα οι ροές των $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{B}$ μέσα από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια είναι ίσες με μηδέν.

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Στο κενό δεν υπάρχουν ρεύματα αγωγιμότητας, άρα τα επικαμπύλια ολοκληρώματα των $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{B}$ σε οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή συνδέονται με τον ρυθμό μεταβολής της ροής του άλλου πεδίου.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μαγνητικής και της ηλεκτρικής ροής, οι εξισώσεις γίνονται:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} \qquad (29.22)$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt}\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} \qquad (29.23)$$

Παρατηρούμε τη συμμετρία μεταξύ του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Επίσης, ότι η χρονική μεταβολή οποιουδήποτε από τα δύο πεδία επάγει τη δημιουργία του άλλου πεδίου στη γειτονική περιοχή του χώρου. Από τις εξισώσεις αυτές ο Maxwell πρόβλεψε την ύπαρξη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, δηλαδή χρονομεταβαλλόμενων ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων που διαδίδονται από μια περιοχή του χώρου σε άλλη χωρίς να μεσολαβεί κάποιο υλικό μέσο.

Στις εξισώσεις αυτές περιέχονται όλες οι βασικές σχέσεις μεταξύ των πεδίων και των πηγών τους. Προσθέτοντας στις εξισώσεις αυτές τη σχέση που ορίζει το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο μέσω των δυνάμεων που ασκούν σε ένα φορτίο, δηλαδή

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \qquad (29.24)$$

έχουμε όλες τις θεμελιώδεις εξισώσεις του Ηλεκτρομαγνητισμού

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 30

ΕΠΑΓΩΓΗ

ΕΠΑΓΩΓΗ

Ένα μεταβαλλόμενο ρεύμα σε ένα πηνίο επάγει μια ΗΕΔ σε ένα άλλο γειτονικό πηνίο. Η σύζευξη των πηνίων περιγράφεται από την **αμοιβαία επαγωγή** τους. **Ένα μεταβαλλόμενο ρεύμα σε πηνίο επάγει επίσης μια ΗΕΔ σε αυτό το ίδιο το πηνίο.** Ένα τέτοιο πηνίο ονομάζεται **αυτεπαγωγή,** και η σχέση του ρεύματος προς την ΗΕΔ περιγράφεται από την **επαγωγή** του πηνίου (ονομαζόμενη επίσης αυτεπαγωγή). Εάν ένα πηνίο διαρρέεται αρχικά από ρεύμα, τότε ελευθερώνεται ενέργεια όταν το ρεύμα ελαττώνεται· αυτή η ενέργεια που ελευθερώνεται ήταν αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο που προκαλούσε το ρεύμα το οποίο διέρρεε αρχικά το πηνίο.

Στο Σχ. 30.1, ένα ρεύμα i_1 στο πηνίο 1 δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο B, και κάποιες από τις (γαλάζιες) δυναμικές γραμμές διαπερνούν το πηνίο 2. Συμβολίζουμε τη μαγνητική ροή που περνά από κάθε σπείρα του πηνίου 2, που προκαλείται από το ρεύμα i_1 στο πηνίο 1, με Φ_{B2}.
Το μαγνητικό πεδίο είναι ανάλογο προς το i_1, συνεπώς η Φ_{B2} είναι επίσης ανάλογη προς το i_1.
Όταν το i_1 μεταβάλλεται, η Φ_{B2} μεταβάλλεται· αυτή η μεταβαλλόμενη ροή επάγει ΗΕΔ στο πηνίο 2 που δίνεται από τη σχέση, σύμφωνα με το νόμο του Faraday:

$$\mathcal{E}_2 = -N_2\frac{d\Phi_{B2}}{dt} \qquad (30.1)$$

Θα μπορούσαμε να παραστήσουμε την αναλογία των Φ_{B2} και i_1, εισάγοντας μια σταθερά αναλογίας M_{21}, που **ονομάζεται αμοιβαία επαγωγή των δύο πηνίων,** οπότε γράφουμε:

$$N_2\Phi_{B2} = M_{21}i_1 \qquad (30.2)$$

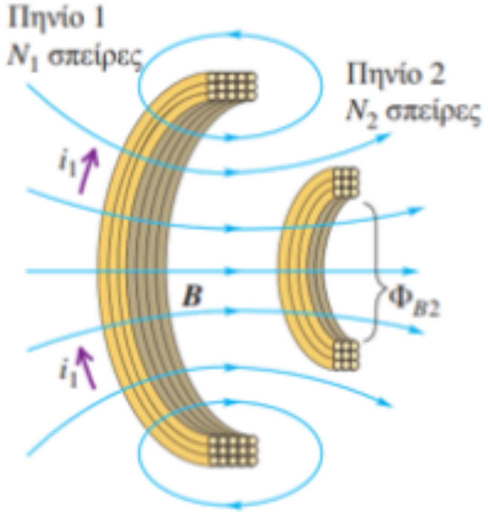
όπου Φ_{B2} είναι η ροή μέσω μίας μόνο σπείρας του πηνίου 2.
Οπότε ξαναγράφουμε την Εξ. (30.1) ως:

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21}\frac{di_1}{dt} \qquad (30.3)$$

Δηλαδή μια μεταβολή στο ρεύμα i_1 στο πηνίο 1 επάγει μια ΗΕΔ στο πηνίο 2 που είναι ευθέως ανάλογη προς τον ρυθμό μεταβολής του i_1.

30.1 Ένα ρεύμα i_1 στο πηνίο 1 δημιουργεί μια μαγνητική ροή μέσω του πηνίου 2.

Αμοιβαία επαγωγή: Εάν το ρεύμα στο πηνίο 1 μεταβάλλεται, τότε η μεταβαλλόμενη ροή μέσω του πηνίου 2 επάγει μια ΗΕΔ στο πηνίο 2.



ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

Μπορούμε να επαναλάβουμε τη συζήτησή μας στην αντίθετη περίπτωση, κατά την οποία ένα μεταβαλλόμενο ρεύμα i_2 στο πηνίο 2 προκαλεί μια μεταβαλλόμενη ροή Φ_{B1} και μια ΗΕΔ $\mathcal{E}_1$ στο πηνίο 1. Προκύπτει ότι η αντίστοιχη σταθερά M_{12} είναι **πάντοτε ίση** με τη M_{21}, ακόμη και όταν τα δύο πηνία δεν είναι πανομοιότυπα και η ροή μέσα από αυτά δεν είναι η ίδια. Ονομάζουμε αυτήν την κοινή τιμή απλώς αμοιβαία επαγωγή, που συμβολίζεται με M χωρίς δείκτες· χαρακτηρίζει πλήρως την επαγόμενη ΗΕΔ από την αλληλεπίδραση των δύο πηνίων. Τότε:

Επαγόμενη ΗΕΔ στο πηνίο 2
Ρυθμός μεταβολής του ρεύματος στο πηνίο 1
Επαγόμενη ΗΕΔ στο πηνίο 1
Ρυθμός μεταβολής του ρεύματος στο πηνίο 2

Αμοιβαία επαγόμενες ΗΕΔ:

$$\mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt} \quad \text{και} \quad \mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} \tag{30.4}$$

Αμοιβαία επαγωγή των πηνίων 1 και 2

Τα αρνητικά πρόσημα στις Εξ. (30.4) αντανακλούν τον **νόμο του Lenz**. Η πρώτη εξίσωση αναφέρει ότι μια μεταβολή στο ρεύμα του πηνίου 1 προκαλεί μεταβολή στη ροή μέσω του πηνίου 2, επάγοντας μια ΗΕΔ στο πηνίο 2 που αντιτίθεται στη μεταβολή της ροής· στη δεύτερη εξίσωση οι ρόλοι των δύο πηνίων εναλλάσσονται.
Από την 30.2 η αμοιβαία επαγωγή M είναι:

Σπείρες στο πηνίο 2
Μαγνητική ροή μέσα από κάθε σπείρα του πηνίου 2
Σπείρες στο πηνίο 1
Μαγνητική ροή μέσα από κάθε σπείρα του πηνίου 1

Αμοιβαία επαγωγή των πηνίων 1 και 2

$$M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1\Phi_{B1}}{i_2} \tag{30.5}$$

Ρεύμα στο πηνίο 1 (προκαλεί ροή μέσα από το πηνίο 2)
Ρεύμα στο πηνίο 2 (προκαλεί ροή μέσα από το πηνίο 1)

Προσοχή: Σημειώστε ότι μόνο ένα **χρονικά μεταβαλλόμενο** ρεύμα σε ένα πηνίο μπορεί να επάγει μια ΗΕΔ, και συνεπώς ένα ρεύμα, σε ένα δεύτερο πηνίο. Η μονάδα αμοιβαίας επαγωγής στο σύστημα SI ονομάζεται **henry** (χένρι, 1 Η), προς τιμήν του Αμερικανού Joseph Henry (Τζόζεφ Χένρι, 1797-1878), ενός από αυτούς που ανακάλυψαν την ηλεκτρομαγνητική επαγωγή.

$$1\ \text{H} = 1\ \text{Wb/A} = 1\ \text{V}\cdot\text{s/A} = 1\ \Omega\cdot\text{s} = 1\ \text{J/A}^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

https://videos.papazissi.gr/EX30_1/

Το πηνίο Tesla Σε μια μορφή του πηνίου Tesla (μια γεννήτρια υψηλής τάσεως που ίσως να έχετε δει σε μουσείο φυσικών επιστημών), αποτελείται από ένα μακρύ σωληνοειδές μήκους L και εμβαδού διατομής A που έχει πολύ πυκνά περιτυλιγμένες N_1 σπείρες σύρματος. Ένα άλλο πηνίο με N_2 σπείρες το περιβάλλει στο κέντρο του (Σχ. 31–2). Να βρείτε την αμοιβαία επαγωγή.

ΛΥΣΗ Ένα ρεύμα i_1 στο σωληνοειδές δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}_1$ στο κέντρο του· το μέτρο του $\boldsymbol{B}_1$ είναι

$$B_1 = \mu_0 n i_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{L}.$$

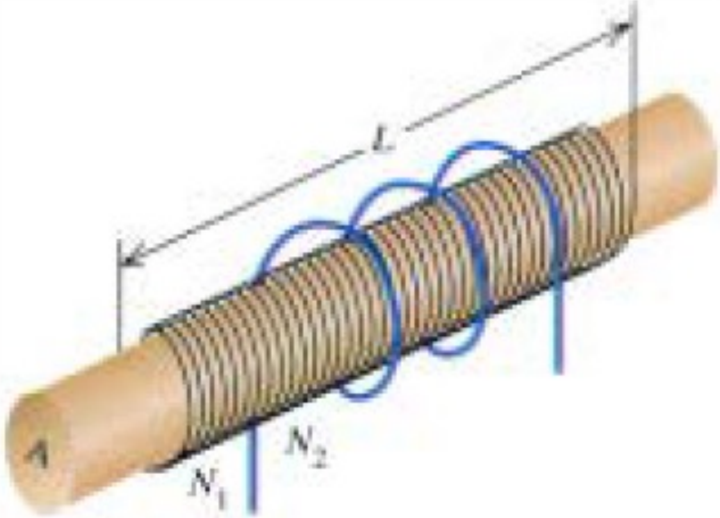
Η ροή μέσω της διατομής στο κέντρο του ισούται προς $B_1 A$ και όλη αυτή η ροή διέρχεται από το πηνίο μικρού μήκους. η αμοιβαία επαγωγή M είναι

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_2}{i_1}\frac{\mu_0 N_1 i_1}{L} A = \frac{\mu_0 A N_1 N_2}{L}.$$

Ένα αριθμητικό παράδειγμα σας δίνει μια ιδέα των μεγεθών. Υποθέστε ότι $L = 0{,}50$ m, $A = 10\ \text{cm}^2 = 1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$, $N_1 = 1000$ σπείρες και $N_2 = 10$ σπείρες. Τότε

$$M = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A·m})(1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)(1000)(10)}{0{,}50\ \text{m}}$$

$$= 25 \times 10^{-6}\ \text{Wb/A} = 25 \times 10^{-6}\ \text{H} = 25\ \mu\text{H}.$$

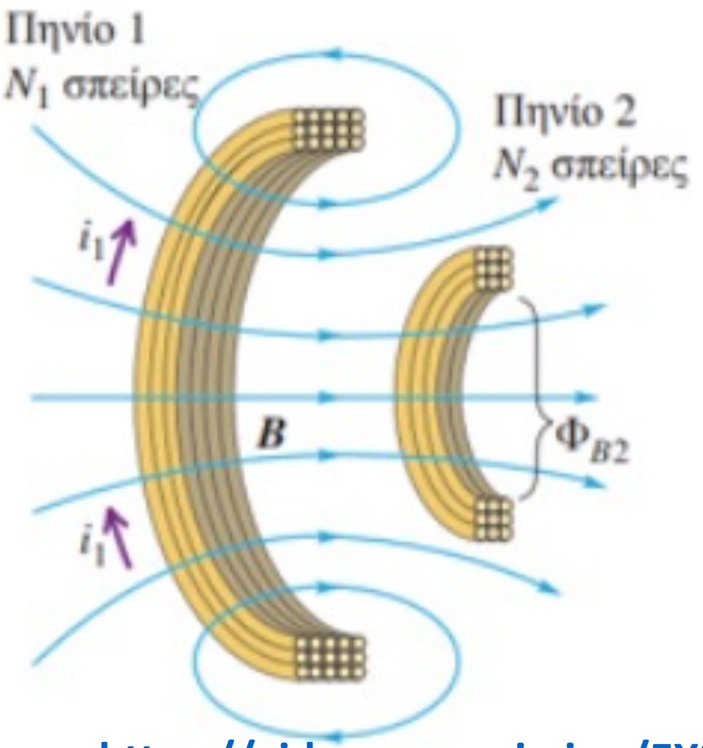


31–2 Ένας τύπος του πηνίου Tesla, ένα μακρύ σωληνοειδές, με εμβαδό διατομής A και N_1 σπείρες, περιβάλλεται στο κέντρο του από πηνίο μικρού μήκους με N_2 σπείρες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$N_1 = 1000$ σπείρες και $N_2 = 10$ σπείρες.

Υποθέστε ότι το ρεύμα i_2 στο βραχύτερο πηνίο δίνεται από τη σχέση $i_2 = (2{,}0\ \text{A/s})t$. a) Τη χρονική στιγμή $t = 3{,}0$ s, ποια είναι η μέση μαγνητική ροή μέσω κάθε σπείρας του σωληνοειδούς, που προκαλείται από το ρεύμα στο βραχύτερο πηνίο; b) Ποια είναι η επαγόμενη ΗΕΔ στο σωληνοειδές;



$M = 25\ \mu\text{H}.$

https://videos.papazissi.gr/EX30_2/

ΛΥΣΗ a) Τη χρονική στιγμή $t = 3{,}0$ s το ρεύμα στο πηνίο 2 είναι $i_2 = (2{,}0\ \text{A/s})(3{,}0\ \text{s}) = 6{,}0$ A. Για να βρούμε τη ροή στο σωληνοειδές,

$$N_1\Phi_{B1} = Mi_2,$$

$$(\Phi_{B1})_{\text{av}} = \frac{Mi_2}{N_1} = \frac{(25\times10^{-6}\ \text{H})(6{,}0\ \text{A})}{1000}$$

$$= 0{,}15\times10^{-6}\ \text{Wb}.$$

Αυτή είναι μια μέση τιμή· η ροή μπορεί να διαφέρει λίγο από τη μια σπείρα στην άλλη.

b) Η επαγόμενη ΗΕΔ $\mathcal{E}_1$

$$\mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt}$$

$$= -(25\times10^{-6}\ \text{H})\frac{d}{dt}(2{,}0\ \text{A/s})t$$

$$= -(25\times10^{-6}\ \text{H})(2{,}0\ \text{A/s})$$

$$= -5{,}0\times10^{-5}\ \text{V}.$$

Αυτή είναι μια πολύ μικρή τάση που προκαλείται από έναν πολύ μικρό ρυθμό μεταβολής του ρεύματος. Σε ένα πραγματικό πηνίο Tesla εν λειτουργία, το di_2/dt θα εναλλάσσονταν πολύ γρήγορα και η τάση θα ήταν εκατομμύρια φορές μεγαλύτερη από αυτήν του παραδείγματος.

ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΠΗΝΙΑ   Ι

30.4 Το ρεύμα i στο κύκλωμα προκαλεί ένα μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ στο πηνίο και ως εκ τούτου μια ροή μέσω του πηνίου.

Μια τέτοια ΗΕΔ ονομάζεται **ΗΕΔ αυτεπαγωγής**. Σύμφωνα με τον νόμο του Lenz, μια ΗΕΔ αυτεπαγωγής πάντοτε αντιτίθεται προς τη μεταβολή του ρεύματος που προκάλεσε την ΗΕΔ και έτσι τείνει να κάνει πιο δύσκολη την εμφάνιση μεταβολών στο ρεύμα. Γι’ αυτόν τον λόγο, οι ΗΕΔ αυτεπαγωγής μπορούν να έχουν μεγάλη σπουδαιότητα οποτεδήποτε υπάρχει ένα μεταβαλλόμενο ρεύμα.

Κατ’ αναλογία προς την Εξ. (30.5) ορίζουμε την αυτεπαγωγή L του κυκλώματος ως:

Αριθμός σπειρών στο πηνίο

Αυτεπαγωγή **(ή επαγωγή)** ενός πηνίου

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \qquad (30.6)$$

Ροή λόγω του ρεύματος μέσα από κάθε σπείρα του πηνίου

Ρεύμα στο πηνίο

Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης με την αμοιβαία επαγωγή, η αυτεπαγωγή ονομάζεται απλά **επαγωγή**.
Από τον νόμο του Faraday για ένα πηνίο με *N* σπείρες, η ΗΕΔ αυτεπαγωγής είναι:

$$\mathcal{E} = -N d\Phi_B/dt$$

Αναδιατάσσοντας την Εξ. (30.6) και παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο:

Επαγωγή του κυκλώματος

ΗΕΔ αυτεπαγωγής σε ένα κύκλωμα

$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt} \qquad (30.7)$$

Ρυθμός μεταβολής του ρεύματος στο κύκλωμα

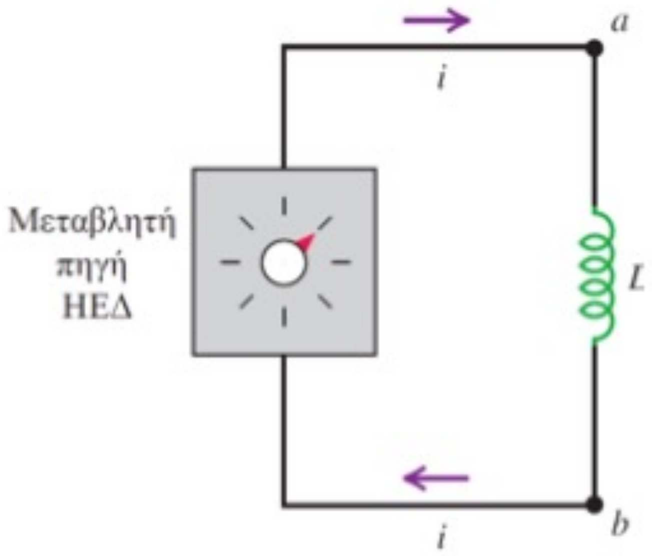
Το αρνητικό πρόσημο στην Εξ. (30.7) αντανακλά τον νόμο του Lenz· σημαίνει ότι η ΗΕΔ αυτεπαγωγής σε ένα κύκλωμα αντιστέκεται σε κάθε μεταβολή του ρεύματος αυτού του κυκλώματος.

ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΠΗΝΙΑ II

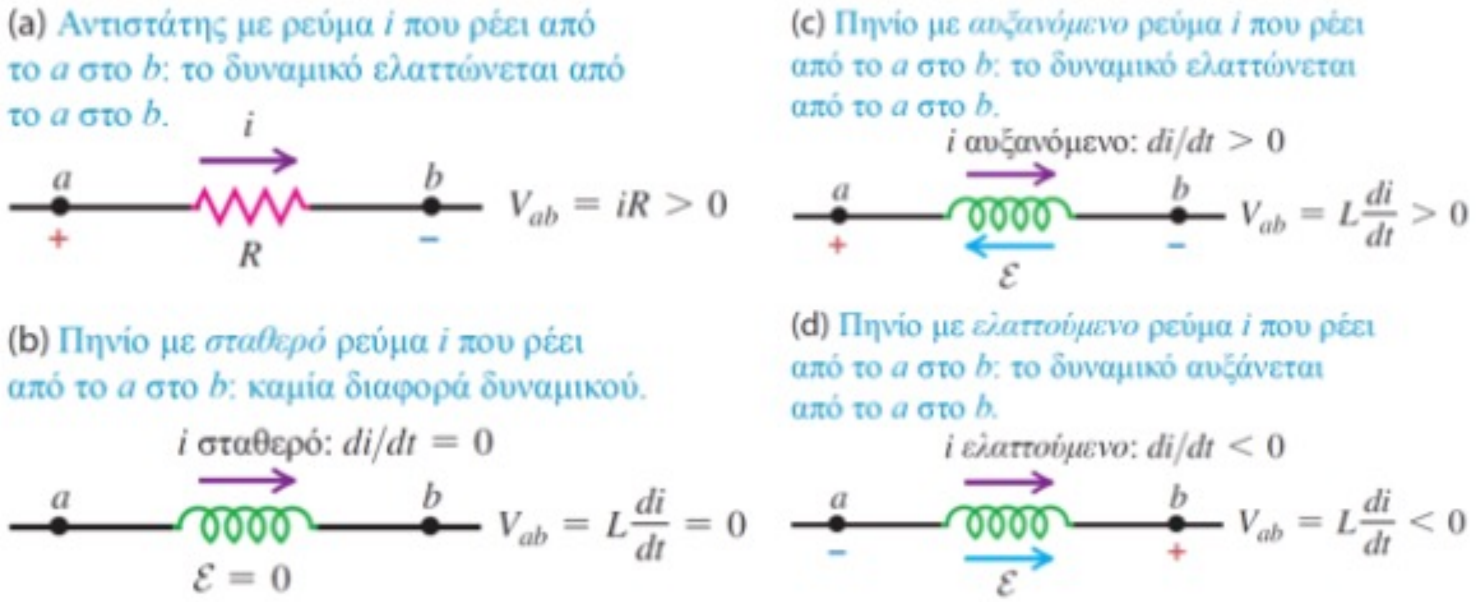
Η Εξ. (30.8) δίνει τη διαφορά δυναμικού στα άκρα ενός πηνίου σε ένα κύκλωμα

$$V_{ab} = V_a - V_b = L\frac{di}{dt} \qquad (30.8)$$

30.5 Ένα κύκλωμα που περιέχει μια πηγή ΗΕΔ και ένα πηνίο. Η πηγή είναι μεταβλητή, οπότε το ρεύμα i και ο ρυθμός μεταβολής του di/dt μπορεί να μεταβάλλονται.



30.6 (a) Η διαφορά δυναμικού στα άκρα ενός αντιστάτη εξαρτάται από το ρεύμα, ενώ (b), (c), (d) η διαφορά δυναμικού στα άκρα ενός πηνίου εξαρτάται από τον ρυθμό μεταβολής του ρεύματος.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένα δακτυλιοειδές πηνίο με πυρήνα αέρα, εμβαδού διατομής A και μέσης ακτίνας r φέρει πολύ πυκνά περιτυλιγμένες N σπείρες σύρματος (Σχ. 31–6). Προσδιορίστε την αυτεπαγωγή του L. Για τον υπολογισμό της ροής, υποθέστε ότι το B είναι ομογενές σε όλη την επιφάνεια της διατομής· θεωρήστε αμελητέα τη μεταβολή του B με την απόσταση από τον άξονα του δακτυλίου.

ΛΥΣΗ αυτεπαγωγή,

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}.$$

Για να βρούμε το Φ_B, πρέπει πρώτα να βρούμε το μέτρο του πεδίου B. σε απόσταση r από τον άξονα του δακτυλίου, $B = \mu_0 Ni/2\pi r$. Εάν υποθέσουμε ότι το πεδίο έχει αυτό το μέτρο σε όλη την έκταση της διατομής A, τότε η ολική ροή μέσω της διατομής είναι

$$\Phi_B = BA = \frac{\mu_0 NiA}{2\pi r}.$$

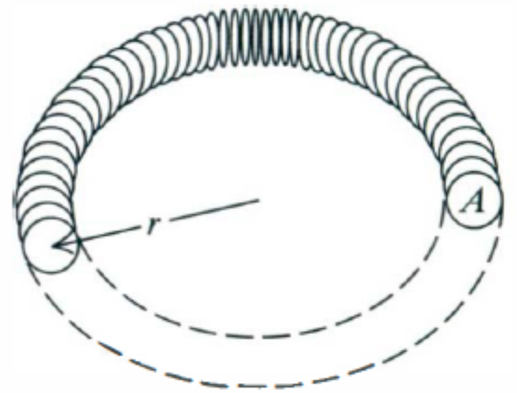
Όλη η ροή διαπερνά κάθε σπείρα και η αυτεπαγωγή L είναι

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}.$$

Υποθέστε ότι $N = 200$ σπείρες, $A = 5{,}0\ \text{cm}^2 = 5{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$ και $r = 0{,}10$ m· τότε

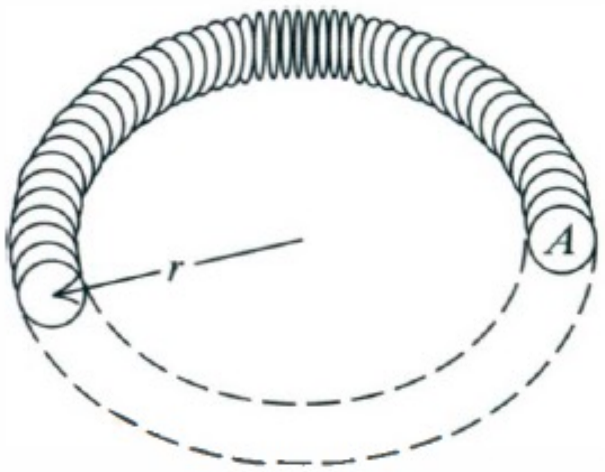
$$L = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A·m})(200)^2(5{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)}{2\pi(0{,}10\ \text{m})}$$

$$= 40 \times 10^{-6}\ \text{H} = 40\ \mu\text{H}.$$



31–6 Προσδιορίζοντας την αυτεπαγωγή ενός πυκνά περιτυλιγμένου δακτυλιοειδούς πηνίου (τόρου).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



Εάν το ρεύμα στο πηνίο αυξάνει ομοιόμορφα από 0 μέχρι 6,0 A σε 0,30 s, να βρείτε το μέτρο και τη φορά της επαγόμενης ΗΕΔ.

ΛΥΣΗ

$$|\mathcal{E}| = L\frac{di}{dt} = (40 \times 10^{-6}\ \mathrm{H})\frac{6{,}0\ \mathrm{A}}{0{,}30\ \mathrm{s}}$$
$$= 8{,}0 \times 10^{-4}\ \mathrm{V}.$$

Το ρεύμα αυξάνει και σύμφωνα με το νόμο του Lenz, η φορά της ΗΕΔ είναι αντίθετη προς αυτήν του ρεύματος.

η ΗΕΔ έχει τη φορά από *b* προς *a*, όπως σε μπαταρία με το *a* ως πόλο + και το *b* ως πόλο –, αφού έχει την τάση να αντισταθεί στην αύξηση του ρεύματος από το εξωτερικό κύκλωμα. ■

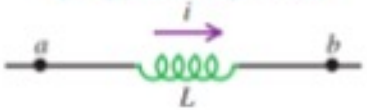
https://videos.papazissi.gr/EX30_4/

ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

30.9 Ένας αντιστάτης είναι ένα στοιχείο εντός του οποίου η ενέργεια καταναλώνεται χωρίς δυνατότητα ανάκτησης. Αντιθέτως, η ενέργεια που αποθηκεύεται σε ένα πηνίο το οποίο διαρρέεται από ρεύμα μπορεί να ανακτηθεί όταν το ρεύμα ελαττώνεται προς το μηδέν.

Αντιστάτης με ρεύμα i: η ενέργεια *καταναλώνεται*.

Πηνίο με ρεύμα i: η ενέργεια *αποθηκεύεται*.



30.10 Η ενέργεια που απαιτείται για την ανάφλεξη ενός μπουζί αυτοκινήτου προέρχεται από την ενέργεια μαγνητικού πεδίου που αποθηκεύεται στο πηνίο ανάφλεξης.

Αποθηκευμένη ενέργεια σε ένα πηνίο

Ο ρυθμός P με τον οποίο η ενέργεια παρέχεται προς το πηνίο (ίσος με την στιγμιαία ισχύ που παρέχεται από την εξωτερική πηγή) είναι:

$$dU = P\,dt,$$

$$P = V_{ab}i = Li\frac{di}{dt} \qquad \text{οπότε} \qquad dU = Li\,di$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την ολική εισρέουσα ενέργεια U που απαιτείται για να δημιουργηθεί ένα τελικό ρεύμα I σε ένα πηνίο με αυτεπαγωγή L εάν το αρχικό ρεύμα είναι μηδέν:

Αποθηκευμένη ενέργεια σε ένα πηνίο → Επαγωγή → Τελικό ρεύμα

$$U = L\underbrace{\int_0^I}_{\text{Ολοκλήρωμα από την αρχική τιμή (μηδέν) του στιγμιαίου ρεύματος έως την τελική τιμή}} i\,di = \frac{1}{2}LI^2 \qquad (30.9)$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r} \qquad\qquad B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

Πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας

Η ενέργεια σε ένα πηνίο ουσιαστικά αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο του, ακριβώς όπως η ενέργεια ενός πυκνωτή αποθηκεύεται στο ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς του.

Πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας στο κενό → Μέτρο του μαγνητικού πεδίου → Μαγνητική σταθερά

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad (30.10)$$

Αυτό είναι το μαγνητικό ανάλογο της ενέργειας ανά μονάδα όγκου σε ένα ηλεκτρικό πεδίο στο κε$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$

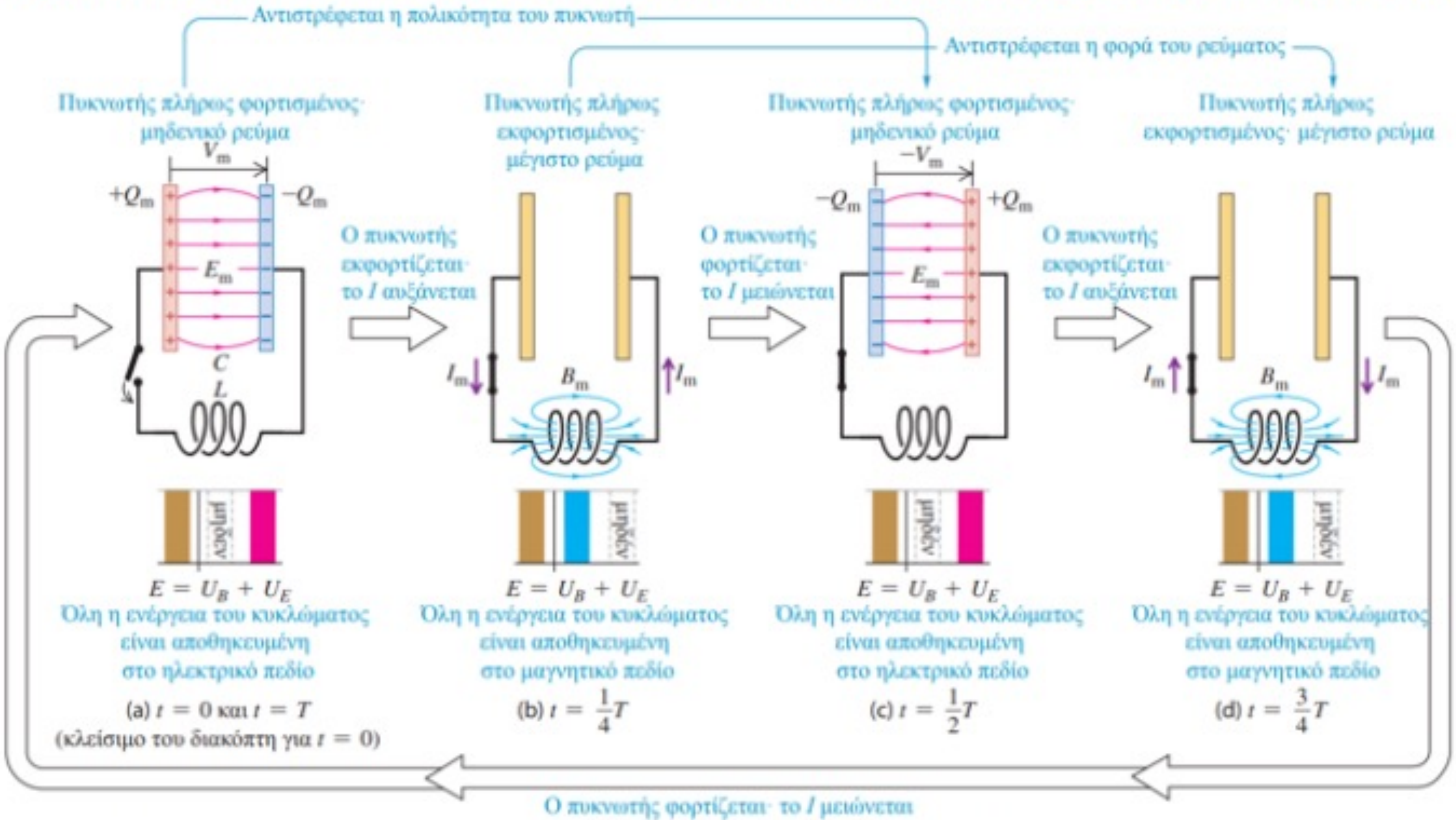
Πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας σε ένα υλικό → Μέτρο του μαγνητικού πεδίου → Μαγνητική διαπερατότητα του υλικού

$$u = \frac{B^2}{2\mu} \qquad (30.11)$$

Αποδεικνύεται ότι αυτή είναι η ορθή έκφραση για την ενέργεια ανά μονάδα όγκου που συνδέεται με οποιαδήποτε διάταξη μαγνητικού πεδίου σε ένα υλικό σταθερής διαπερατότητας.

ΤΟ ΚΥΚΛΩΜΑ L-C I

Ένα κύκλωμα που περιέχει ένα πηνίο και έναν πυκνωτή δείχνει μια εντελώς νέα μορφή συμπεριφοράς, που χαρακτηρίζεται από ταλαντούμενο ρεύμα και φορτ

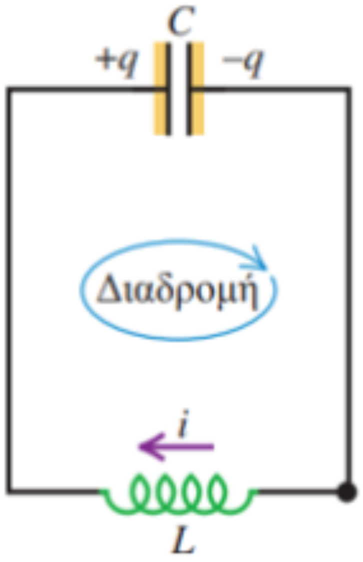


30.14 Σε ένα ταλαντούμενο κύκλωμα L-C, το φορτίο στον πυκνωτή και το ρεύμα μέσω του πηνίου μεταβάλλονται ημιτονοειδώς με τον χρόνο. Η ενέργεια μεταπίπτει μεταξύ της μαγνητικής ενέργειας στο πηνίο (U_B) και της ηλεκτρικής ενέργειας στον πυκνωτή (U_E). Όπως συμβαίνει και στην απλή αρμονική κίνηση, ολική ενέργεια E παραμένει σταθερή.

ΤΟ ΚΥΚΛΩΜΑ L-C II

Ηλεκτρικές Ταλαντώσεις σε ένα Κύκλωμα L-C

30.15 Εφαρμογή του κανόνα βρόχου του Kirchhoff σε κύκλωμα L-C. Φαίνεται η φορά διαδρομής στον βρόχο που θεωρούμε για την εξίσωση του βρόχου.



$$-L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \qquad\qquad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad (30.20)$$

Η Εξ. (30.20) έχει ακριβώς την ίδια μορφή με την εξίσωση για την απλή αρμονική κίνηση:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad\qquad x = A\cos(\omega t + \phi)$$

όπου το πλάτος A και η γωνία φάσης φ εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες.

Σε ένα κύκλωμα L-C το φορτίο του πυκνωτή q παίζει τον ρόλο της μετατόπισης x, και το ρεύμα $i = dq/dt$ είναι ανάλογο της ταχύτητας του σωματίου $\upsilon_x = dx/dt$. Η επαγωγή L είναι ανάλογη της μάζας m, και το αντίστροφο της χωρητικότητας, $1/C$, είναι ανάλογο της σταθεράς ελατηρίου k, επομένως:

$$q = Q\cos(\omega t + \phi) \qquad (30.21)$$

Το στιγμιαίο ρεύμα $i = dq/dt$ είναι: $i = -\omega Q\sin(\omega t + \phi)$ (30.23)

Γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης σε ένα κύκλωμα L-C

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad (30.22)$$

Χωρητικότητα

Επαγωγή

Οι σταθερές Q και φ στις Εξ. (30.21) και (30.23) προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένα κύκλωμα ταλαντώσεων Τροφοδοτικό 300 V dc χρησιμοποιείται για να φορτίσει πυκνωτή 25 μF. Μετά την πλήρη φόρτισή του ο πυκνωτής αποσυνδέεται από την πηγή και συνδέεται με πηνίο 10 mH. Η αντίσταση στο κύκλωμα είναι αμελητέα. a) Βρείτε τη συχνότητα ταλάντωσης του κυκλώματος. b) Βρείτε το φορτίο του πυκνωτή και το ρεύμα στο κύκλωμα 1,2 ms μετά τη σύνδεση του πυκνωτή με το πηνίο.

ΛΥΣΗ a) Η φυσική γωνιακή συχνότητα είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(10 \times 10^{-3}\ \mathrm{H})(25 \times 10^{-6}\ \mathrm{F})}}$$
$$= 2{,}0 \times 10^{3}\ \mathrm{rad/s}.$$

Η συχνότητα f είναι:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2{,}0 \times 10^{3}\ \mathrm{rad/s}}{2\pi\ \mathrm{rad/κύκλο}} = 320\ \mathrm{Hz}.$$

b) Το φορτίο είναι μέγιστο τη χρονική στιγμή $t = 0$, έτσι $\phi = 0$ και $Q = CV_m = (25 \times 10^{-6}\ \mathrm{F})\ (300\ \mathrm{V}) = 7{,}5 \times 10^{-3}\ \mathrm{C}$. Το φορτίο q κάθε χρονική στιγμή είναι

$$q = (7{,}5 \times 10^{-3}\ \mathrm{C}) \cos \omega t.$$

Τη χρονική στιγμή $t = 1{,}2 \times 10^{-3}$ s,

$$\omega t = (2{,}0 \times 10^{3}\ \mathrm{rad/s})(1{,}2 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}) = 2{,}4\ \mathrm{rad},$$
$$q = (7{,}5 \times 10^{-3}\ \mathrm{C}) \cos (2{,}4\ \mathrm{rad}) = -5{,}5 \times 10^{-3}\ \mathrm{C}.$$

Το ρεύμα i σε κάθε χρονική στιγμή είναι

$$i = -\omega Q \sin \omega t.$$

Τη χρονική στιγμή $t = 1{,}2 \times 10^{-3}$ s,

$$i = -(2{,}0 \times 10^{3}\ \mathrm{rad/s})(7{,}5 \times 10^{-3}\ \mathrm{C}) \sin (2{,}4\ \mathrm{rad})$$
$$= -10\ \mathrm{A}.$$

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι αυτή τη χρονική στιγμή το ρεύμα είναι αντίθετο προς τη φορά που ορίστηκε ως θετική

https://videos.papazissi.gr/EX30_8/

Ενέργεια σε Ένα Κύκλωμα L-C

Το κύκλωμα L-C είναι επίσης ένα διατηρητικό σύστημα. Ας θεωρήσουμε και πάλι ότι Q είναι το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή. Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου ½ Li^2 στο πηνίο κάθε χρονική στιγμή αντιστοιχεί στην κινητική ενέργεια ½ mv^2 του ταλαντούμενου σώματος και η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου $q^2/2C$ στον πυκνωτή αντιστοιχεί στη δυναμική ενέργεια ½ kx^2 του ελατηρίου. Το άθροισμα αυτών των ενεργειών ισούται με την ολική ενέργεια $Q^2/2C$ του συστήματος:

$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} \qquad (30.25)$$

Η ολική ενέργεια στο κύκλωμα L-C είναι σταθερή· ταλαντώνεται μεταξύ της ηλεκτρικής και της μαγνητικής μορφής, ακριβώς όπως η ολική μηχανική ενέργεια στην απλή αρμονική κίνηση είναι σταθερή και ταλαντώνεται μεταξύ της κινητικής και της δυναμικής μορφής.

ΠΙΝΑΚΑΣ 30.1

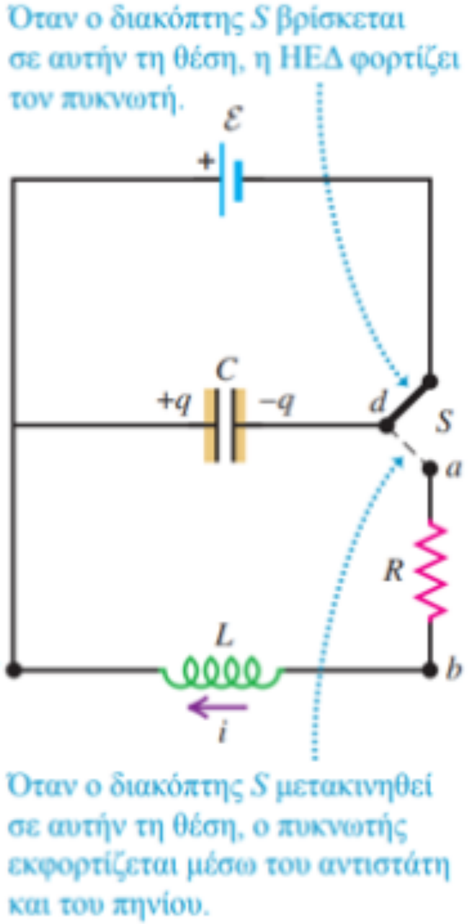
Ταλάντωση Συστήματος Ελατηρίου-Μάζας Συγκρινόμενη με Ηλεκτρική Ταλάντωση σε Κύκλωμα L-C

Σύστημα Ελατηρίου-Μάζας	Κύκλωμα Πηνίου-Πυκνωτή
Κινητική ενέργεια $= \frac{1}{2}mv_x^2$	Μαγνητική ενέργεια $= \frac{1}{2}Li^2$
Δυναμική ενέργεια $= \frac{1}{2}kx^2$	Ηλεκτρική ενέργεια $= q^2/2C$
$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$	$\frac{1}{2}Li^2 + q^2/2C = Q^2/2C$
$v_x = \pm\sqrt{k/m}\sqrt{A^2 - x^2}$	$i = \pm\sqrt{1/LC}\sqrt{Q^2 - q^2}$
$v_x = dx/dt$	$i = dq/dt$
$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$	$\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$
$x = A\cos(\omega t + \phi)$	$q = Q\cos(\omega t + \phi)$

Στον **Πίνακα 30.1** συνοψίζονται οι αναλογίες μεταξύ της απλής αρμονικής κίνησης και των ταλαντώσεων στο κύκλωμα L-C. **Η εμφανής παραλληλία που φαίνεται εκεί είναι τόσο ισχυρή που μας επιτρέπει να λύσουμε περίπλοκα μηχανικά προβλήματα κατασκευάζοντας ανάλογα ηλεκτρικά κυκλώματα και μετρώντας τα ρεύματα και τα δυναμικά που αντιστοιχούν στις μηχανικές ποσότητες που πρέπει να προσδιοριστούν. Αυτή είναι η βασική αρχή πολλών αναλογικών υπολογιστών. Αυτή η αναλογία μπορεί να επεκταθεί στις αποσβενόμενες ταλαντώσεις.**

ΤΟ ΚΥΚΛΩΜΑ L-R-C ΣΕ ΣΕΙΡΑ I

30.17 Ένα κύκλωμα L-R-C σε σειρά.



Εξαιτίας της αντίστασης, η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια στο κύκλωμα καταναλώνεται και μετατρέπεται σε άλλες μορφές, όπως σε εσωτερική ενέργεια στα υλικά του κυκλώματος. Η αντίσταση σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα είναι ανάλογη προς την τριβή σε ένα μηχανικό σύστημα.

Ανάλυση Ενός Κυκλώματος L-R-C σε Σειρά

Πρώτα κλείνουμε τον διακόπτη προς τα πάνω, συνδέοντας τον πυκνωτή με μια πηγή ΗΕ$\mathcal{E}$ για αρκετά μακρό χρονικό διάστημα ώστε να είμαστε σίγουροι ότι ο πυκνωτής αποκτά το τελικό του φορτίο $Q = C\mathcal{E}$ και κάθε αρχική ταλάντωση έχει πλήρως αποσβεστεί. Έπειτα, τη χρονική στιγμή $t = 0$ θέτουμε τον διακόπτη στη θέση προς τα κάτω, αφαιρώντας την πηγή από το κύκλωμα και θέτοντας τον πυκνωτή σε σειρά με τον αντιστάτη και το πηνίο. Σημειώστε ότι το αρχικό ρεύμα είναι αρνητικό, αντίθετης φοράς προς αυτήν που φαίνεται να έχει το i στο Σχ. 30.17.

Αρχίζοντας από το σημείο a και διασχίζοντας τον βρόχο κατά τη διεύθυνση $abcda$, έχουμε:

$$-iR - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Αντικαθιστώντας το i με dq/dt και αναδιατάσσοντας τους όρους βρίσκουμε:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad (30.27)$$

Υπάρχουν γενικές μέθοδοι εύρεσης λύσεων της Εξ. (30.27). Η μορφή της λύσης είναι διαφορετική για την υποκρίσιμα αποσβενόμενη (μικρή R) και για την υπεραποσβενόμενη (μεγάλη R) περίπτωση. Όταν το R^2 είναι μικρότερο από $4L/C$, η λύση έχει τη μορφή (υποκρίσιμα αποσβενόμενη συμπεριφορά):

$$q = Ae^{-(R/2L)t}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t + \phi\right) \qquad (30.28)$$

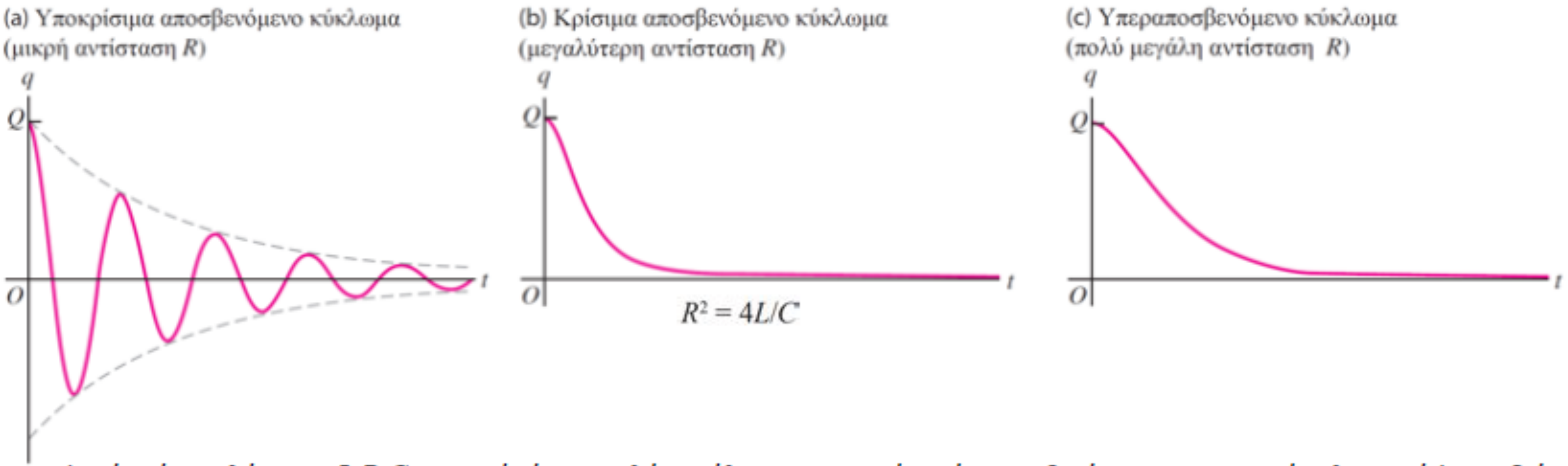
Γωνιακή συχνότητα των υποκρίσιμα αποσβενόμενων ταλαντώσεων σε ένα κύκλωμα L-R-C σε σειρά

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \qquad (30.29)$$

Αντίσταση
Επαγωγή
Επαγωγή
Χωρητικότητα

ΤΟ ΚΥΚΛΩΜΑ *L-R-C* ΣΕ ΣΕΙΡΑ II

30.16 Γραφικές παραστάσεις του φορτίου του πυκνωτή συναρτήσει του χρόνου σε ένα κύκλωμα *L-R-C* σε σειρά με αρχικό φορτίο Q .



Η συμπεριφορά ενός κυκλώματος *L-R-C* σε σειρά είναι εντελώς ανάλογη προς αυτήν ενός αποσβενόμενου αρμονικού ταλαντωτή (Θυμηθείτε την αντιστοιχία μηχανικών - ηλεκτρικών παραμέτρων,):

$$-kx - bv_x = ma_x \quad \text{ή} \quad -kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Αν αντικαταστήσετε τη x με το q προκύπτει η Εξ 30.27

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad (30.27)$$

Στην **υποκρίσιμα αποσβενόμενη** περίπτωση, η σταθερά φάσης φ στο συνημίτονο της Εξ. (30.28) δίνει τη δυνατότητα παρουσίας τόσο αρχικού φορτίου όσο και αρχικού ρεύματος τη χρονική στιγμή $t = 0$, ανάλογα προς έναν υποκρίσιμα αποσβενόμενο αρμονικό ταλαντωτή που του δίνεται αρχική μετατόπιση και αρχική ταχύτητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Τι αντίσταση R απαιτείται (συναρτήσει των L και C) για να δώσει σε ένα κύκλωμα L-R-C μια συχνότητα που ισούται προς το μισό της μη αποσβενόμενης συχνότητας;

ΛΥΣΗ Θέλουμε η γωνιακή συχνότητα ω' να είναι το μισό της μη αποσβενόμενης γωνιακής συχνότητας ω

Έτσι έχουμε

$$\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4R^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Αν υψώσουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη και λύσουμε ως προς R, βρίσκουμε

$$R=\sqrt{\frac{3L}{C}}.$$