

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΓΕΩΛΟΓΙΑΣ
Μαθηματικά Ι

Ημερομηνία: 01-07-2015

Ώρα: 09:00-12:00

Εξεταστής: Λέκτορας Ι. Δημητρίου

1. (α') [μονάδες: 0.5] Να βρεθεί η n -οστή δύναμη του 2×2 πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (β') [μονάδες: 1.5] Αν A , B και $A + B$ είναι αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες, ναδειχθεί ότι,

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B.$$

- (γ') [μονάδες: 1] Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών ναδειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y - x)(z - x)(z - y).$$

2. Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + \lambda z = 3 \\ x + \lambda y + 3z = 2 \end{cases}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

- (α') [μονάδες: 1.2] Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση και ποια είναι αυτή η λύση;
(β') [μονάδες: 1.3] Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και ποια η μορφή έχουν αυτές οι λύσεις;
(γ') [μονάδες: 0.5] Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα δεν έχει λύσεις;

3. [μονάδες: 2] Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

και εξηγήστε γιατί είναι αντιστρέψιμος. Κατόπιν βρείτε τον αντίστροφο του A .

4. Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y - 7z = -3 \\ y + 4z - w = 4 \\ -2x - 6y + 6z + 2w = -2 \end{cases}, \quad x, y, z, w \in \mathbb{R}.$$

- (α') [μονάδες: 0.5] Χωρίς να κάνετε πράξεις, αποφανθείτε αν το σύστημα έχει μοναδική λύση ή όχι.
(β') [μονάδες: 1.5] Εφαρμόστε την απαλοιφή Gauss για να λύσετε το σύστημα, διακρίνοντας τις βασικές και τις ελεύθερες μεταβλητές πριν κάνετε την ανάδρομη αντικατάσταση. Ποια η λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος;