«Στοιχεία Γεωδαισίας»

Ομάδα Ασκήσεων 2

Θεμελιώδη Προβλήματα

Λευθεριώτης Γεώργιος
Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Πατρών

Άσκηση 1

Δίνονται τα σημεία Α και Β με συντεταγμένες:

$$\mathbf{X_A = 58871{,}56\ m} \qquad \mathbf{X_B = 58506{,}71\ m}$$
$$\mathbf{Y_A = 21742{,}15\ m} \qquad \mathbf{Y_B = 21915{,}46\ m}$$

Να υπολογιστούν:

α) η απόσταση $\mathbf{D_{AB}}$

β) η γωνία διεύθυνσης $\boldsymbol{\alpha_{AB}}$

Άσκηση 1

Λύση

Η άσκηση αντιστοιχεί στο 2ο θεμελιώδες πρόβλημα.

α) Η απόσταση $\mathbf{D_{AB}}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D_{AB} = \sqrt{\left(X_B - X_A\right)^2 + \left(Y_B - Y_A\right)^2} \Rightarrow$$

$$D_{AB} = \sqrt{\left(58506,71 - 58871,56\right)^2 + \left(21915,46 - 21742,15\right)^2} \Rightarrow$$

$$D_{AB} = \sqrt{\left(-364,85\right)^2 + \left(173,31\right)^2} = \sqrt{133115,5225 + 30036,3561} \Rightarrow$$

$$D_{AB} = \sqrt{163151,8786} \Rightarrow$$

$$\boxed{D_{AB} = 403,92\ m}$$

Άσκηση 1

Λύση

Η γωνία διεύθυνσης $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{AB}}$ υπολογίζεται μέσω της βοηθητικής γωνίας **α**.

$$a = \tan^{-1}\frac{|\Delta X_{AB}|}{|\Delta Y_{AB}|} = \tan^{-1}\frac{|X_B - X_A|}{|Y_B - Y_A|} \qquad 0 \le \alpha \le 100^g$$

Άρα έχουμε:

$$a = \tan^{-1}\frac{|58506,71 - 58871,56|}{|21915,46 - 21742,15|} = \tan^{-1}\frac{|-364,85|}{|173,31|} = \tan^{-1}(2,10518) \Rightarrow$$

$$\boxed{a = 71,768^g}$$

Απομένει να γίνει έλεγχος τεταρτημορίου

Άσκηση 1

Λύση

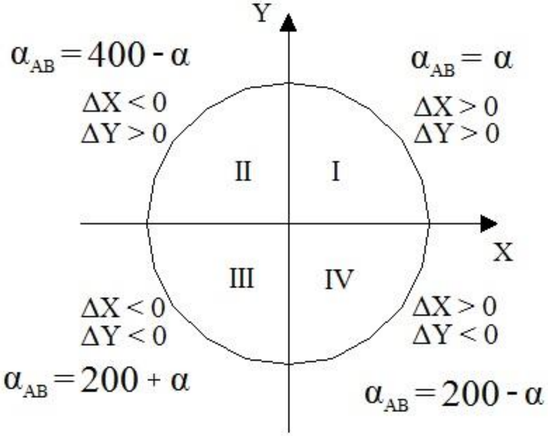
Έλεγχος τεταρτημορίου

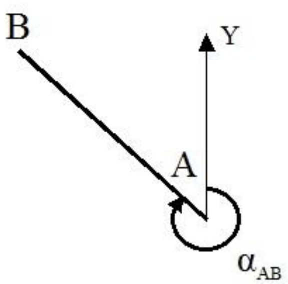
$$\Delta X_{AB} = X_B - X_A = -364,85 \Rightarrow \Delta X_{AB} < 0$$

$$\Delta Y_{AB} = Y_B - Y_A = 173,31 \Rightarrow \Delta Y_{AB} > 0$$

Άρα η γωνία διεύθυνσης $\boldsymbol{\alpha_{AB}}$ βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο και ισχύει:

$$a_{AB} = 400 - a \Rightarrow a_{AB} = 400 - 71,768 \Rightarrow \boxed{a_{AB} = 328,232^g}$$



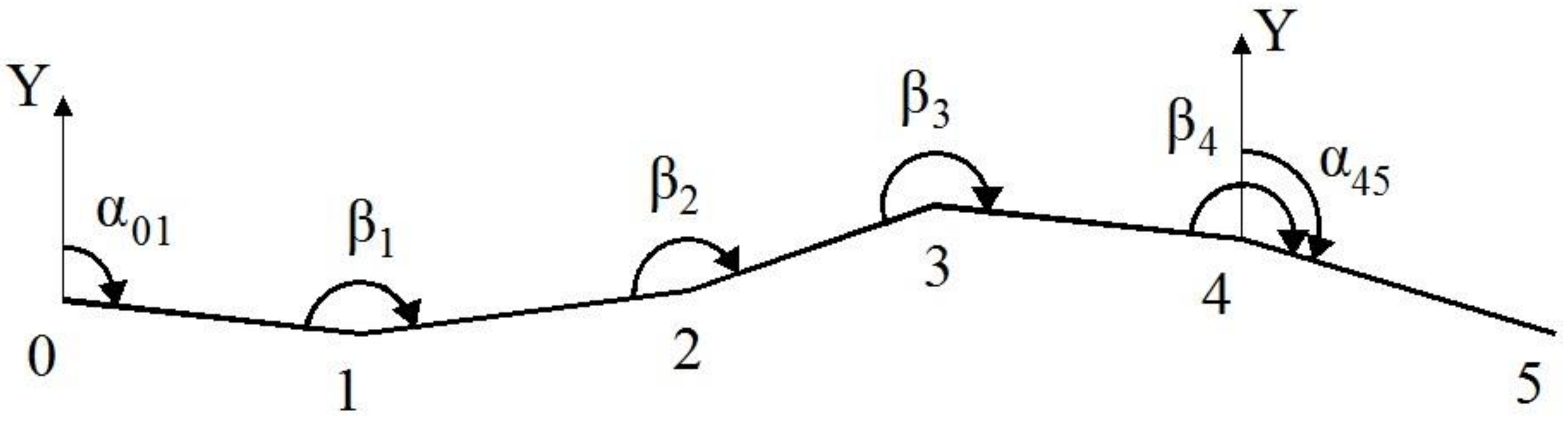


Άσκηση 2

Δίνονται οι γωνίες θλάσης $β_i$ της πολυγωνικής γραμμής 012345 όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, καθώς και η γωνία διεύθυνσης $α_{01} = 102,5162^g$

$β_1 = 179,1533^g$ $β_3 = 211,5241^g$
$β_2 = 201,5362^g$ $β_4 = 208,3216^g$

- Να υπολογιστεί η γωνία διεύθυνσης $\boldsymbol{α_{45}}$



Άσκηση 2

Λύση

Η άσκηση αντιστοιχεί στο 3ο θεμελιώδες πρόβλημα.

- Για τη γωνία διεύθυνσης $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{n,n+1}}$ ισχύει ότι :

$$\boxed{a_{n,n+1} = a_{01} + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n + n \cdot 200^g - k \cdot 400^g}$$

- Άρα για τη γωνία διεύθυνσης $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{4,5}}$ θα ισχύει :

$$a_{4,5} = a_{01} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + 4 \cdot 200^g - k \cdot 400^g \Rightarrow$$

$$a_{4,5} = 102,5162^{\mathrm{g}} + 179,1533 + 201,5362^g + 211,5241^g + 208,3216^g + 4 \cdot 200^g - k \cdot 400^g \Rightarrow$$

$$a_{4,5} = 1703,0514^g - k \cdot 400^g$$

- Στο συντελεστή ***k*** δίνουμε κατάλληλη τιμή ώστε **$0 \leq \boldsymbol{\alpha}_{4,5} \leq 400^{g}$** $\longrightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{k = 4}}$

$$a_{4,5} = 1703,0514^g - 4 \cdot 400^g \Rightarrow \boxed{a_{4,5} = 103,0514^g}$$

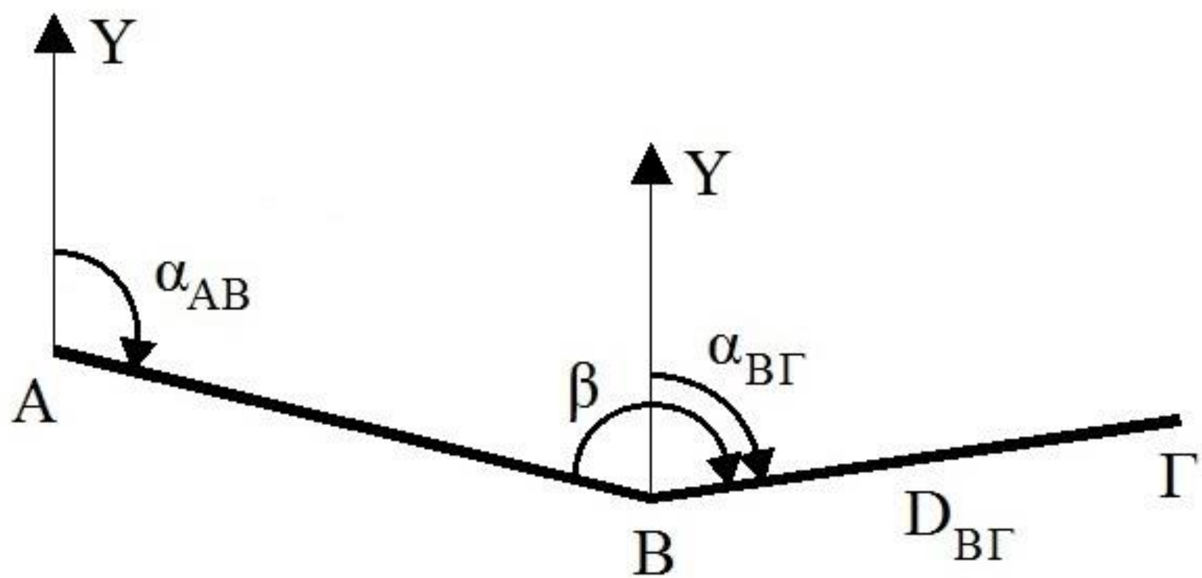
Άσκηση 3

Δίνονται οι συντεταγμένες δύο σημείων Α και Β.

$\mathbf{X_A = 1483{,}52\ m}$ $\mathbf{X_B = 1683{,}65\ m}$

$\mathbf{Y_A = 1386{,}42\ m}$ $\mathbf{Y_B = 1167{,}31\ m}$

Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες ενός τρίτου σημείου Γ εάν η (δεξιόστροφη) γωνία $\boldsymbol{\beta = 151{,}68^g}$ και η απόσταση $\mathbf{D_{B\Gamma} = 91{,}12\ m}$



Άσκηση 3

Λύση

- Αρχικά υπολογίζουμε τη γωνία διεύθυνσης $\boldsymbol{\alpha}_{AB}$ (2^{o} θεμελιώδες πρόβλημα)

Η γωνία διεύθυνσης $\boldsymbol{\alpha}_{AB}$ υπολογίζεται μέσω της βοηθητικής γωνίας **α**.

$$a = \tan^{-1}\frac{|\Delta X_{AB}|}{|\Delta Y_{AB}|} = \tan^{-1}\frac{|X_B - X_A|}{|Y_B - Y_A|} \qquad 0 \le \alpha \le 100^{g}$$

Άρα έχουμε:

$$a = \tan^{-1}\frac{|1683,65 - 1483,52|}{|1167,31 - 1386,42|} = \tan^{-1}\frac{|200,13|}{|-219,11|} = \tan^{-1}(0,91337) \Rightarrow \boxed{a = 47,120^{g}}$$

Απομένει να γίνει έλεγχος τεταρτημορίου

Άσκηση 3

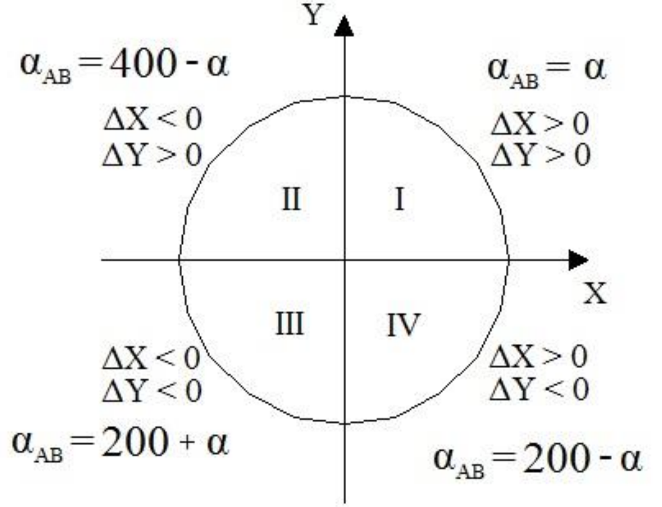
Λύση

Έλεγχος τεταρτημορίου

$$\Delta X_{AB} = X_B - X_A = 200{,}13 \Rightarrow \Delta X_{AB} > 0$$

$$\Delta Y_{AB} = Y_B - Y_A = -219{,}11 \Rightarrow \Delta Y_{AB} < 0$$

Άρα η γωνία διεύθυνσης $\boldsymbol{\alpha_{AB}}$ βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο και ισχύει ότι:



$$a_{AB} = 200 - a \Rightarrow a_{AB} = 200 - 47{,}120 \Rightarrow \boxed{a_{AB} = 152{,}88^g}$$

- Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη γωνία διεύθυνσης $\boldsymbol{\alpha_{B\Gamma}}$ (3ο θεμελιώδες πρόβλημα)
- Για τη γωνία διεύθυνσης $\boldsymbol{\alpha_{n,n+1}}$ ισχύει ότι :

$$\boxed{a_{n,n+1} = a_{01} + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n + n \cdot 200^g - k \cdot 400^g}$$

Άσκηση 3

Λύση

- Άρα για τη γωνία διεύθυνσης $\mathbf{\alpha_{B\Gamma}}$ θα ισχύει :

$$a_{B\Gamma} = a_{AB} + \beta + 1 \cdot 200^g - k \cdot 400^g \Rightarrow$$

$$a_{B\Gamma} = 152{,}88^g + 151{,}68^g + 1 \cdot 200^g - k \cdot 400^g \Rightarrow$$

$$a_{B\Gamma} = 504{,}56^g - k \cdot 400^g$$

- Στο συντελεστή ***k*** δίνουμε κατάλληλη τιμή ώστε $\mathbf{0 \leq \alpha_{B\Gamma} \leq 400^g}$ ⟶ $\boxed{k = 1}$

$$a_{B\Gamma} = 504{,}56^g - 1 \cdot 400^g \Rightarrow \boxed{a_{B\Gamma} = 104{,}56^g}$$

- Τέλος, υπολογίζουμε τις συντεταγμένες του σημείου Γ ($\mathbf{X_\Gamma}$, $\mathbf{Y_\Gamma}$) εφαρμόζοντας το 1ο θεμελιώδες πρόβλημα.

$$X_\Gamma = X_B + D_{B\Gamma} \cdot \sin a_{B\Gamma} \qquad Y_\Gamma = Y_B + D_{B\Gamma} \cdot \cos a_{B\Gamma}$$

Άσκηση 3

Λύση

$$X_{\Gamma} = X_{B} + D_{B\Gamma} \cdot \sin a_{B\Gamma} \Rightarrow X_{\Gamma} = 1683,65 + 91,12 \cdot \sin 104,56^{g} \Rightarrow$$

$$\boxed{X_{\Gamma} = 1774,536}$$

$$Y_{\Gamma} = Y_{B} + D_{B\Gamma} \cdot \cos a_{B\Gamma} \Rightarrow Y_{\Gamma} = 1167,31 + 91,12 \cdot \cos 104,56^{g} \Rightarrow$$

$$\boxed{Y_{\Gamma} = 1160,789}$$

Άσκηση 4

Δίνονται οι συντεταγμένες τριών σημείων **Α, Β, Γ** στο σύστημα συντεταγμένων **Ι**.

$\mathbf{X_{AI} = -24542{,}583\ m}$ $\mathbf{X_{BI} = -20326{,}465\ m}$ $\mathbf{X_{\Gamma I} = -21983{,}659\ m}$

$\mathbf{Y_{AI} = -2286{,}412\ m}$ $\mathbf{Y_{BI} = 1097{,}349\ m}$ $\mathbf{Y_{\Gamma I} = -667{,}351\ m}$

Επίσης δίνονται οι συντεταγμένες των **Α, Β** στο σύστημα συντεταγμένων **ΙΙ**.

$\mathbf{X_{AII} = 125634{,}583\ m}$ $\mathbf{X_{BII} = 130103{,}465\ m}$

$\mathbf{Y_{AII} = 4502456{,}412\ m}$ $\mathbf{Y_{BII} = 4506251{,}351\ m}$

Ζητούνται οι συντεταγμένες του σημείου **Γ** στο σύστημα συντεταγμένων **ΙΙ**.

Άσκηση 4

Λύση

- Για την επίλυση του προβλήματος μετατροπής συντεταγμένων ενός σημείου από το σύστημα I στο σύστημα II, απαιτείται να υπολογιστούν τα εξής στοιχεία: $\mathbf{X_{OII}}$, $\mathbf{Y_{OII}}$, $\boldsymbol{\varphi}$ και $\boldsymbol{m}$.
- Για να γίνει ο υπολογισμός των στοιχείων αυτών, απαιτείται να υπάρχουν **δύο** τουλάχιστον σημεία **A** και **B** με γνωστές συντεταγμένες και στα 2 συστήματα, τα οποία τα έχουμε.

- Αρχικά υπολογίζουμε τη γωνία $\boldsymbol{\varphi}$ η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\varphi = \alpha_{\mathrm{AB_I}} - \alpha_{\mathrm{AB_{II}}}}$$

Για τον υπολογισμό της γωνίας $\boldsymbol{\varphi}$ πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τις γωνίες $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{ABI}}$ και $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{ABII}}$ (2^{o} θεμελιώδες πρόβλημα).

Άσκηση 4

Λύση

Η γωνία διεύθυνσης $\boldsymbol{\alpha_{ABI}}$ υπολογίζεται μέσω της βοηθητικής γωνίας $\boldsymbol{\alpha_I}$ ως εξής:

$$a_I = \tan^{-1}\frac{\left|\Delta X_{AB_I}\right|}{\left|\Delta Y_{AB_I}\right|} = \tan^{-1}\frac{\left|X_{B_I} - X_{A_I}\right|}{\left|Y_{B_I} - Y_{A_I}\right|} \qquad 0 \le a_I \le 100^g$$

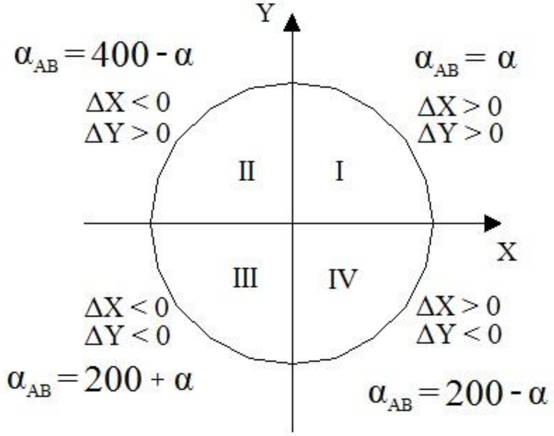
Άρα έχουμε:

$$a_I = \tan^{-1}\frac{\left|-20326,465-(-24542,583)\right|}{\left|1097,349-(-2286,412)\right|} = \tan^{-1}\frac{\left|4216,118\right|}{\left|3383,761\right|} = \tan^{-1}(1,24598) \Rightarrow \boxed{a_I = 56,945^g}$$

Έλεγχος τεταρτημορίου

$$\Delta X_{AB_I} = X_{B_I} - X_{A_I} = 4216,118 \Rightarrow \Delta X_{AB_I} > 0$$

$$\Delta Y_{AB_I} = Y_{B_I} - Y_{A_I} = 3383,761 \Rightarrow \Delta Y_{AB_I} > 0$$



Άρα η γωνία $\boldsymbol{\alpha_{ABI}}$ βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο και ισχύει ότι:

$$a_{AB_I} = a_I \Rightarrow \boxed{a_{AB_I} = 56,945^g}$$

Στοιχεία Γεωδαισίας

Άσκηση 4

Λύση

Ομοίως υπολογίζουμε τη γωνία διεύθυνσης $\boldsymbol{\alpha_{ABII}}$ μέσω της βοηθητικής γωνίας $\boldsymbol{\alpha_{II}}$:

$$a_{II} = \tan^{-1}\frac{\left|\Delta X_{AB_{II}}\right|}{\left|\Delta Y_{AB_{II}}\right|} = \tan^{-1}\frac{\left|X_{B_{II}} - X_{A_{II}}\right|}{\left|Y_{B_{II}} - Y_{A_{II}}\right|} \qquad 0 \leq a_{II} \leq 100^{g}$$

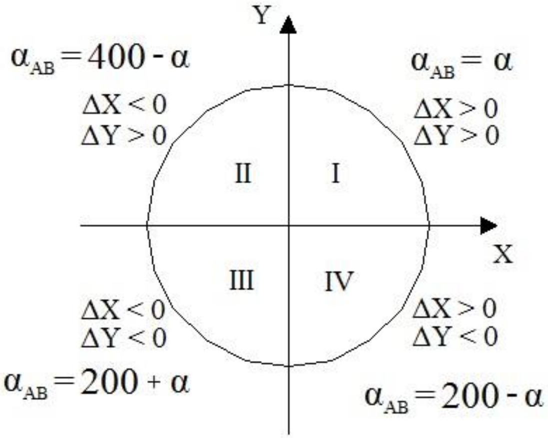
Άρα έχουμε:

$$a_{II} = \tan^{-1}\frac{\left|130103,465 - 125634,583\right|}{\left|4506251,351 - 4502456,412\right|} = \tan^{-1}\frac{\left|4468,882\right|}{\left|3794,939\right|} = \tan^{-1}\left(1,1796\right) \Rightarrow \boxed{a_{II} = 55,180^{g}}$$

Έλεγχος τεταρτημορίου

$$\Delta X_{AB_{II}} = X_{B_{II}} - X_{A_{II}} = 4468,882 \Rightarrow \Delta X_{AB_{II}} > 0$$

$$\Delta Y_{AB_{II}} = Y_{B_{II}} - Y_{A_{II}} = 3794,939 \Rightarrow \Delta Y_{AB_{II}} > 0$$



Άρα η γωνία $\boldsymbol{\alpha_{ABII}}$ βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο και ισχύει ότι:

$$a_{AB_{II}} = a_{II} \Rightarrow \boxed{a_{AB_{II}} = 55,180^{g}}$$

Άσκηση 4

Λύση

Άρα η γωνία *φ* είναι ίση με: $\varphi = \alpha_{\mathrm{AB_I}} - \alpha_{\mathrm{AB_{II}}} = 56,945^g - 55,180^g \Rightarrow \boxed{\varphi = 1,765^g}$

- Έπειτα υπολογίζουμε το συντελεστή ομοιότητας ***m*** από τη σχέση:

$$\boxed{m = D_{AB_{II}} / D_{AB_I}}$$

Για τον υπολογισμό του συντελεστή ομοιότητας ***m*** πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα τις αποστάσεις $\boldsymbol{D_{\mathrm{ABI}}}$ και $\boldsymbol{D_{\mathrm{ABII}}}$ (2ο θεμελιώδες πρόβλημα).

Η απόσταση $\boldsymbol{D_{\mathrm{ABI}}}$ υπολογίζεται από τη σχέση: $D_{AB_I} = \sqrt{\left(X_{B_I} - X_{A_I}\right)^2 + \left(Y_{B_I} - Y_{A_I}\right)^2}$

Άρα $D_{AB_I} = \sqrt{\left(-20326,465 - \left(-24542,583\right)\right)^2 + \left(1097,349 - \left(-2286,412\right)\right)^2} \Rightarrow$

$$D_{AB_I} = \sqrt{\left(4216,118\right)^2 + \left(3383,761\right)^2} \Rightarrow \boxed{D_{AB_I} = 5406,06m}$$

Άσκηση 4

Λύση

Ομοίως υπολογίζουμε την απόσταση $\boldsymbol{D_{ABII}}$ από: $D_{AB_{II}} = \sqrt{\left(X_{B_{II}} - X_{A_{II}}\right)^2 + \left(Y_{B_{II}} - Y_{A_{II}}\right)^2}$

Άρα $D_{AB_{II}} = \sqrt{\left(130103,465 - 125634,583\right)^2 + \left(4506251,351 - 4502456,412\right)^2} \Rightarrow$

$$D_{AB_{II}} = \sqrt{\left(4468,882\right)^2 + \left(3794,939\right)^2} \Rightarrow \boxed{D_{AB_{II}} = 5862,804m}$$

Άρα ο συντελεστής ομοιότητας ***m*** είναι ίσος με: $m = \frac{D_{AB_{II}}}{D_{AB_{I}}} = \frac{5862,804}{5406,06} \Rightarrow \boxed{m = 1,084}$

- Τέλος υπολογίζουμε τις συντεταγμένες $\mathbf{X_{OII}}$, $\mathbf{Y_{OII}}$ από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\boxed{\begin{aligned} X_{O_{II}} &= X_{A_{II}} - m \cdot \left(X_{A_I} \cdot \cos\varphi - Y_{A_I} \cdot \sin\varphi\right) \\ Y_{O_{II}} &= Y_{A_{II}} - m \cdot \left(X_{A_I} \cdot \sin\varphi - Y_{A_I} \cdot \cos\varphi\right) \end{aligned}}$$

στις οποίες αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του **Α** και τις τιμές των ***φ*** και ***m***.

Άσκηση 4

Λύση

Έτσι λοιπόν έχουμε για τις συντεταγμένες $\mathbf{X_{O_{II}}}$, $\mathbf{Y_{O_{II}}}$

$$X_{O_{II}} = X_{A_{II}} - m \cdot \left(X_{A_I} \cdot \cos\varphi - Y_{A_I} \cdot \sin\varphi \right) \Rightarrow$$

$$X_{O_{II}} = 125634{,}583 - 1{,}084 \cdot \left(-24542{,}583 \cdot \cos\left(1{,}765^g\right) - \left(-2286{,}412\right) \cdot \sin\left(1{,}765^g\right) \right) \Rightarrow$$

$$X_{O_{II}} = 125634{,}583 - 1{,}084 \cdot \left(-24533{,}151 + 63{,}3816 \right) = 125634{,}583 - \left(-26525{,}23 \right) \Rightarrow$$

$$X_{O_{II}} = 125634{,}583 + 26525{,}23 \Rightarrow \boxed{X_{O_{II}} = 152159{,}813m}$$

$$Y_{O_{II}} = Y_{A_{II}} - m \cdot \left(X_{A_I} \cdot \sin\varphi - Y_{A_I} \cdot \cos\varphi \right)$$

$$Y_{O_{II}} = 4502456{,}412 - 1{,}084 \cdot \left(-24542{,}583 \cdot \sin\left(1{,}765^g\right) - \left(-2286{,}412\right) \cdot \cos\left(1{,}765^g\right) \right) \Rightarrow$$

$$Y_{O_{II}} = 4502456{,}412 - 1{,}084 \cdot \left(-680{,}345 + 2285{,}533 \right) = 4502456{,}412 - 1740{,}0238 \Rightarrow \boxed{Y_{O_{II}} = 4500716{,}388m}$$

Σημείωση: Οι συντεταγμένες $\mathbf{X_{O_{II}}}$ και $\mathbf{Y_{O_{II}}}$ θα μπορούσαν να υπολογιστούν επίσης και από τις συντεταγμένες του σημείου **B**.

Άσκηση 4

Λύση

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του σημείου **Γ** στο σύστημα συντεταγμένων **ΙΙ** μέσω των σχέσεων:

$$\boxed{X_{\Gamma_{II}} = X_{O_{II}} + m \cdot \left(X_{\Gamma_I} \cdot \cos\varphi - Y_{\Gamma_I} \cdot \sin\varphi \right)}$$

$$\boxed{Y_{\Gamma_{II}} = Y_{O_{II}} + m \cdot \left(X_{\Gamma_I} \cdot \sin\varphi - Y_{\Gamma_I} \cdot \cos\varphi \right)}$$

$$X_{\Gamma_{II}} = 152159,813 + 1,084 \cdot \left(-21983,659 \cdot \cos\left(1,765^g\right) - \left(-667,351\right) \cdot \sin\left(1,765^g\right) \right) \Rightarrow$$

$$X_{\Gamma_{II}} = 152159,813 + 1,084 \cdot \left(-21975,210 + 18,4996 \right) \Rightarrow \boxed{X_{\Gamma_{II}} = 128358,739m}$$

$$Y_{\Gamma_{II}} = 4500716,388 + 1,084 \cdot \left(-21983,659 \cdot \sin\left(1,765^g\right) - \left(-667,351\right) \cdot \cos\left(1,765^g\right) \right) \Rightarrow$$

$$Y_{\Gamma_{II}} = 4500716,388 + 1,084 \cdot \left(-609,4091 + 667,0945 \right) \Rightarrow \boxed{Y_{\Gamma_{II}} = 4500788,919m}$$