«Στοιχεία Γεωδαισίας»

Ομάδα Ασκήσεων 1

Θεωρία Σφαλμάτων

Λευθεριώτης Γεώργιος
Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Πατρών

Άσκηση 1

Η απόσταση L_{AB} μεταξύ δύο σημείων μετρήθηκε επτά φορές με το ίδιο όργανο, τον ίδιο παρατηρητή και κάτω από τις ίδιες συνθήκες μέτρησης, δηλαδή με το ίδιο σύστημα.

Τα αποτελέσματα των μετρήσεων (σε μέτρα, m) δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

1316,226	1316,213	1316,223	1316,238	1316,231	1316,209	1316,214

<u>Να υπολογιστούν:</u>

a. Η καλύτερη τιμή της απόστασης.

b. Η τυπική απόκλιση (τυπικό σφάλμα) των παρατηρήσεων.

c. Το τυπικό σφάλμα της καλύτερης τιμής.

Άσκηση 1

Λύση

a. Η καλύτερη εκτίμηση της ακριβούς τιμής ενός μεγέθους είναι ο **μέσος όρος** ή αλλιώς η **μέση τιμή** του μεγέθους.

Άρα λοιπόν υπολογίζουμε το μέσο όρο:

$$\overline{L}_{AB} = \frac{L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{L}_{AB} = \frac{1316,226+1316,213+1316,223+1316,238+1316,231+1316,209+1316,214}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{L}_{AB} = 1316,222\ m}$$

Άσκηση 1

Λύση

b. Η **τυπική απόκλιση** ή **τυπικό σφάλμα** των παρατηρήσεων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\upsilon_1^2+\upsilon_2^2+\ldots+\upsilon_n^2}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{\upsilon_1^2+\upsilon_2^2+\upsilon_3^2+\upsilon_4^2+\upsilon_5^2+\upsilon_6^2+\upsilon_7^2}{7-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = \pm\sqrt{\frac{\left(1316,226-1316,222\right)^2+\ldots+\left(1316,214-1316,222\right)^2}{6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \pm 0,011\ m}$$

c. Το **τυπικό σφάλμα** της καλύτερης τιμής δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{\bar{L}} = \pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \pm\frac{0,011}{\sqrt{7}} \Rightarrow \boxed{\sigma_{\bar{L}} = \pm 0,004\ m}$$

Στοιχεία Γεωδαισίας

Άσκηση 2

Μία απόσταση L_{AB} μετρήθηκε 5 φορές από δύο διαφορετικούς τοπογράφους. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων (σε μέτρα, m) δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Τοπογράφος α	735,245	735,248	735,256	735,232	735,247
Τοπογράφος β	735,232	735,228	735,231	735,225	735,229

Να υπολογιστούν:

a. Οι καλύτερες τιμές κάθε τοπογράφου.
b. Η τυπική απόκλιση (τυπικό σφάλμα) των παρατηρήσεων κάθε τοπογράφου.
c. Το τυπικό σφάλμα της καλύτερης τιμής κάθε τοπογράφου.
d. Ποιος τοπογράφος έκανε καλύτερες μετρήσεις και γιατί;

Στοιχεία Γεωδαισίας

Άσκηση 2

Λύση

a. Η καλύτερη εκτίμηση της ακριβούς τιμής ενός μεγέθους είναι ο **μέσος όρος** ή αλλιώς η **μέση τιμή** του μεγέθους.

Οι παρατηρήσεις κάθε τοπογράφου είναι ισοβαρείς μεταξύ τους.

Άρα λοιπόν υπολογίζουμε το μέσο όρο:

$$\overline{L}_a = \frac{735,245+735,248+735,256+735,256+735,247}{5} \Rightarrow \boxed{\overline{L}_a = 735,246\ m}$$

$$\overline{L}_\beta = \frac{735,232+735,228+735,231+735,225+735,229}{5} \Rightarrow \boxed{\overline{L}_\beta = 735,229\ m}$$

Παρατηρούμε αναμενόμενα ότι οι τιμές είναι διαφορετικές.

Άσκηση 2

Λύση

b. Η **τυπική απόκλιση** (τυπικό σφάλμα) των παρατηρήσεων υπολογίζεται από:

$$\sigma_a = \pm\sqrt{\frac{\left(735,245-735,246\right)^2+\ldots+\left(735,247-735,246\right)^2}{5-1}} \Rightarrow \boxed{\sigma_a = \pm 0,009\ m}$$

$$\sigma_\beta = \pm\sqrt{\frac{\left(735,232-735,229\right)^2+\ldots+\left(735,229-735,229\right)^2}{5-1}} \Rightarrow \boxed{\sigma_\beta = \pm 0,003\ m}$$

c. Το **τυπικό σφάλμα της καλύτερης τιμής** υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sigma_{\bar{L}_a} = \pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \pm\frac{0,009}{\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{\sigma_{\bar{L}_a} = \pm 0,004\ m}$$

$$\sigma_{\bar{L}_\beta} = \pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \pm\frac{0,003}{\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{\sigma_{\bar{L}_\beta} = \pm 0,001\ m}$$

d. Ο δεύτερος τοπογράφος έκανε καλύτερες μετρήσεις, αφού ισχύει ότι:

$$\boxed{\sigma_a > \sigma_\beta \quad \text{και} \quad \sigma_{\bar{L}_a} > \sigma_{\bar{L}_\beta}}$$

Άσκηση 3

Ένα μήκος ***L*** μετρήθηκε σε τρεις διαφορετικές ημέρες μετά από διαφορετικό αριθμό παρατηρήσεων την κάθε ημέρα.

Τα αποτελέσματα των μετρήσεων και ο αριθμός των παρατηρήσεων δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Ημέρα	**Μήκος L (m)**	**Αριθμός παρατηρήσεων**
1η	6294,357	8
2η	6294,314	5
3η	6294,332	13

Να υπολογιστούν:

a. Η καλύτερη τιμή.

b. Η τυπική απόκλιση (τυπικό σφάλμα) των παρατηρήσεων.

Άσκηση 3

Λύση

a. Αφού οι μετρήσεις έγιναν σε διαφορετικές ημέρες, οι παρατηρήσεις είναι ανισοβαρείς.

Οι αριθμοί των μετρήσεων μπορούν να θεωρηθούν ως βάρη. Άρα έχουμε:

P_1 = 8
P_2 = 5
P_3 = 13

Η καλύτερη τιμή είναι ο **μέσος όρος**, που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\overline{L} = \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2 + P_3 L_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{8 \cdot 6294,357 + 5 \cdot 6294,314 + 13 \cdot 6294,332}{8+5+13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{L} = 6294,336\ m}$$

Άσκηση 3

Λύση

b. Η a posteriori (λόγω ανισοβαρών παρατηρήσεων) **τυπική απόκλιση** ή τυπικό σφάλμα των παρατηρήσεων υπολογίζεται από:

$$\hat{\sigma}_0 = \pm\sqrt{\frac{P_1\left(L_1-\overline{L}\right)^2+P_2\left(L_2-\overline{L}\right)^2+P_3\left(L_3-\overline{L}\right)^2}{n-1}} \Rightarrow$$

$$\hat{\sigma}_0 = \pm\sqrt{\frac{8\left(6294{,}357-6294{,}336\right)^2+5\left(6294{,}314-6294{,}336\right)^2+13\left(6294{,}332-6294{,}336\right)^2}{3-1}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{\sigma}_0 = \pm\ 0.055\ m}$$

Άσκηση 4

Σε ένα γήπεδο ποδοσφαίρου μετρήθηκαν οι πλευρές του με τιμές:

$\boldsymbol{a}$ **= 90,18 m** και $\boldsymbol{b}$ **= 60,09 m**.

Οι τυπικές αποκλίσεις (τυπικά σφάλματα) των μετρήσεων των δύο πλευρών του γηπέδου είναι:

$\boldsymbol{\sigma_a = \pm\ 0{,}05\ m}$ και $\boldsymbol{\sigma_b = \pm 0{,}04\ m.}$

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του γηπέδου και το τυπικό σφάλμα $\boldsymbol{\sigma_E}$ του εμβαδού.

Άσκηση 4

Λύση

Το εμβαδόν του γηπέδου προκύπτει από τη σχέση:

$$E = a \cdot b = 90{,}18 \cdot 60{,}09 \Rightarrow \boxed{E = 5418{,}92\ m^2}$$

Το τυπικό σφάλμα **σ_E** του εμβαδού του γηπέδου προκύπτει από την εφαρμογή του νόμου μετάδοσης σφαλμάτων.

$$\sigma_y = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \sigma_{x_2}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 \cdot \sigma_{x_n}^2} \Rightarrow$$

$$\sigma_E = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial a}\right)^2 \cdot \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial b}\right)^2 \cdot \sigma_b^2}$$

Άσκηση 4

Λύση

Οι μερικές παράγωγοι είναι: $\frac{\partial E}{\partial a} = b,$ και $\frac{\partial E}{\partial b} = a$

$$\sigma_E = \pm\sqrt{(b)^2 \cdot \sigma_a^2 + (a)^2 \cdot \sigma_b^2} \Rightarrow \sigma_E = \pm\sqrt{60,09^2 \cdot 0,05^2 + 90,18^2 \cdot 0,04^2} \Rightarrow$$

$$\sigma_E = \pm\sqrt{9.027 + 13.012} \Rightarrow \sigma_E = \pm\sqrt{22.039} \Rightarrow \boxed{\sigma_E = \pm\ 4.69\ m^2}$$

Άρα το εμβαδόν του γηπέδου είναι ίσο με:

$$\boxed{E = 5418,92\ m^2 \pm\ 4.69\ m^2}$$