UNIVERSITY OF PATRAS
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

# Σημειώσεις διαλέξεων «Στοιχεία Γεωδαισίας»

Διάλεξη 3
14/03/2023

Λευθεριώτης Γεώργιος
Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Πατρών

## Θεωρία Σφαλμάτων

### Μετρήσεις

- **Μέτρηση** ενός μεγέθους (π.χ. μήκος) είναι η διαδικασία σύγκρισής του σε σχέση με ένα άλλο που έχει επιλεγεί ως μονάδα μέτρησης (π.χ. 1 m).
- Το αποτέλεσμα της μέτρησης, δηλαδή η αριθμητική τιμή που προκύπτει είναι η **παρατήρηση**.

### Λάθη και Σφάλματα

- Στην καθημερινότητα χρησιμοποιούμε τις λέξεις «**λάθος**» και «**σφάλμα**» με σχεδόν ταυτόσημη έννοια.
- Από τεχνική/επιστημονική άποψη, τα σφάλματα αποτελούν μετρήσιμα μεγέθη με χαρακτηριστικά που προκύπτουν με στατιστικές μεθόδους.
- Αντιθέτως, ο όρος «λάθος» έχει βασικά ποιοτικό χαρακτήρα και θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι λάθος ένας πελάτης να φύγει χωρίς να πληρώσει.

## Θεωρία Σφαλμάτων

**Σφάλματα**

- Αν μετρήσουμε ένα μέγεθος πολλές φορές (π.χ. μήκος), διαπιστώνουμε ότι οι παρατηρήσεις αποκλίνουν μεταξύ τους και παρουσιάζουν διακύμανση.
- Αυτό οφείλεται σε σφάλματα που γίνονται κατά τη μέτρηση. Προφανώς το μέγεθος έχει μία μοναδική **αληθινή τιμή**, αλλά δεν μπορούμε να τη θεωρήσουμε γνωστή.
- Σφάλματα λοιπόν υπεισέρχονται στις **μετρήσεις**, στους **υπολογισμούς** (πχ στρογγυλεύσεις δεκαδικών) και τα **μοντέλα** (απλουστευτικά μοντέλα και αγνόηση παραμέτρων, π.χ. αγνόηση της σφαιρικότητας της Γης).
- Επειδή το τελικό ζητούμενο είναι συνήθως συνδυασμός μετρήσεων, υπολογισμών και μοντέλων, τα σφάλματα υπεισέρχονται σε κάθε μία από τις τρεις ενότητες και διογκώνονται (συσσώρευση σφαλμάτων).

## Θεωρία Σφαλμάτων

### Σφάλματα

- Η **θεωρία των Μετρήσεων και Σφαλμάτων** εστιάζει στα σφάλματα των μετρήσεων και στο πως αυτά μεταδίδονται μέσω υπολογισμών.
- Θεωρητικά, μετά από **άπειρες μετρήσεις**, μπορεί να προσδιοριστεί η **ακριβής τιμή** του μεγέθους. Αυτό όμως δεν είναι εφικτό.
- Έτσι μετράμε το μέγεθος περισσότερες από μία φορές, λαμβάνουμε τις παρατηρήσεις, με στόχο την **καλύτερη εκτίμηση της ακριβούς τιμής**.
- Η τιμή αυτή είναι ο **μέσος όρος** του πλήθους των παρατηρήσεων.
- Επιπλέον, μπορεί να προσδιοριστεί η **ποιότητα** των μετρήσεων που έγιναν και των παρατηρήσεων που ελήφθησαν.
- Η εμπειρία και η θεωρία έχουν δείξει ότι **όλες** οι μετρήσεις περιέχουν σφάλματα. Για το λόγο αυτό, είναι αναγκαίο να προσδιορίζεται η ποιότητα των μετρήσεων.

## Θεωρία Σφαλμάτων

Τα σφάλματα στις μετρήσεις – παρατηρήσεις μπορεί να οφείλονται:

- Στα **όργανα**, τα οποία μπορεί να έχουν ατέλειες ή να μην έχουν ρυθμιστεί σωστά.
- Στον **παρατηρητή** ο οποίος μπορεί να είναι απρόσεκτος ή να έχει άγνοια χρήσης του οργάνου μέτρησης.
- Στις **συνθήκες**, δηλαδή τις περιβαλλοντικές συνθήκες, όπως είναι η θερμοκρασία στην οποία γίνονται οι μετρήσεις.

Στη Γεωδαισία – Τοπογραφία μπορούμε να διακρίνουμε τρεις (3) τύπους σφαλμάτων:

1. **Χονδροειδή σφάλματα**
2. **Συστηματικά σφάλματα**
3. **Τυχαία σφάλματα.**

## Θεωρία Σφαλμάτων

1. **Χονδροειδή σφάλματα**
   - Είναι αποτέλεσμα λαθών και οφείλονται στον παρατηρητή και την απερισκεψία του κατά τις μετρήσεις.
   - Πρέπει να εντοπίζονται και να αφαιρούνται από τις παρατηρήσεις.
2. **Συστηματικά σφάλματα**
   - Μπορεί να οφείλονται σε διάφορες αιτίες, π.χ. στο όργανο, τον παρατηρητή ή τις συνθήκες, αλλά και στον τρόπο επεξεργασίας των παρατηρήσεων.
   - Δεν εξαλείφονται, αλλά μπορούν να περιοριστούν σημαντικά.
   - Παρουσιάζουν σταθερότητα ή περιοδικότητα και μπορούν να εκφραστούν μαθηματικά.
   - Πρέπει να εντοπίζονται και να αφαιρούνται από τις παρατηρήσεις.

## Θεωρία Σφαλμάτων

### 3. Τυχαία σφάλματα

- Είναι αυτά τα οποία δεν ανήκουν στις προηγούμενες κατηγορίες (χονδροειδή, συστηματικά).
- Είναι **αναπόφευκτα** και οι τιμές τους κατά τις μετρήσεις ενός μεγέθους είναι απρόβλεπτες.
- Αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι μεγάλο, τότε μπορούμε να δεχθούμε ότι ακολουθούν την κανονική κατανομή (Gauss), και να γνωρίζουμε την πιθανότητα εμφάνισής τους.
- Αποτελούν το κυρίως αντικείμενο της **Θεωρίας Σφαλμάτων** στη **Γεωδαισία**.
- Με βάση τα τυχαία σφάλματα μπορεί να εκτιμηθεί η **ποιότητα των παρατηρήσεων**.

## Θεωρία Σφαλμάτων

Αν **$X_i$** είναι μία παρατήρηση απαλλαγμένη από τα χονδροειδή και τα συστηματικά σφάλματα και **X** είναι η αληθινή τιμή του μεγέθους, τότε η ποσότητα:

$$\boxed{\varepsilon_i = X_i - X}$$

ονομάζεται **σφάλμα** ή **αληθές σφάλμα**.

---

Αντίστοιχα αν **μ** είναι η ακριβής τιμή του μεγέθους, τότε η ποσότητα:

$$\boxed{u_i = X_i - \mu}$$

ονομάζεται **τυχαίο σφάλμα**.

---

Τέλος, αν $\overline{X}$ είναι η καλύτερη εκτίμηση της ακριβούς τιμής του μεγέθους τότε η ποσότητα:

$$\boxed{\upsilon_i = X_i - \overline{X}}$$

ονομάζεται **πιθανό** ή **φαινόμενο σφάλμα**.

## Θεωρία Σφαλμάτων

Η ποσότητα με αντίθετο πρόσημο από το **φαινόμενο σφάλμα**:

$$\boxed{\delta_i = -\upsilon_i = X - X_i}$$

ονομάζεται **υπόλοιπο** ή **διόρθωση**.

Τα αληθή και τα τυχαία σφάλματα δεν μπορούν να εκτιμηθούν. Τα μόνα που μπορούν να εκτιμηθούν είναι τα **φαινόμενα σφάλματα**.

Τα φαινόμενα σφάλματα χαρακτηρίζονται από τις ίδιες βασικές αρχές με εκείνες των τυχαίων σφαλμάτων, και επομένως ακολουθούν την κανονική κατανομή (Gauss).

Η συνάρτηση πυκνότητας των φαινόμενων σφαλμάτων δίνεται από:

$$\boxed{y = f(\upsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\upsilon^2}{2\sigma^2}}}$$

## Θεωρία Σφαλμάτων

Η παράμετρος ($\sigma$) δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\sigma = \pm\sqrt{\frac{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \ldots + \upsilon_n^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n-1}}}$$

όπου $[\upsilon\upsilon] = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \ldots + \upsilon_n^2$ είναι το άθροισμα των τετραγώνων των φαινομένων σφαλμάτων και $n$ είναι το πλήθος των μετρήσεων.

- Η παράμετρος ($\sigma$) χαρακτηρίζεται ως η **Τυπική Απόκλιση (Standard Deviation - SD)** των παρατηρήσεων.
- Αναφέρεται και ως **Τυπικό Σφάλμα** και αποτελεί δείκτη της ακρίβειας των παρατηρήσεων.
- Όσο μικρότερη η ($\sigma$) τόσο μικρότερα είναι τα φαινόμενα σφάλματα, και τόσο καλύτερη ακρίβεια έχουν οι παρατηρήσεις.

Το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης λέγεται **μεταβλητότητα**.

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{[\upsilon\upsilon]}{n-1}}$$

## Θεωρία Σφαλμάτων

### Τυπικό Σφάλμα (της καλύτερης τιμής ή της μέσης τιμής)

- Το Τυπικό Σφάλμα (Standard Error - SE) της καλύτερης τιμής ενός μεγέθους είναι η ποσότητα που εκφράζει τις διακυμάνσεις στις μετρήσεις.
- Μας δείχνει ποιά είναι η πιθανότητα η μέση τιμή που υπολογίσαμε η οποία βασίζεται σε μικρό αριθμό μετρήσεων να βρίσκεται κοντά στην αληθινή μέση τιμή που βασίζεται σε ένα μεγάλο (άπειρο) αριθμό μετρήσεων.
- Είναι η τυπική απόκλιση των μέσων τιμών και είναι μικρότερη από τις τυπικές αποκλίσεις των μεμονωμένων μετρήσεων.
- Χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της στατιστικής ακρίβειας μιας εκτίμησης.
- **Δεν πρέπει να συγχέεται με την τυπική απόκλιση.**
- Προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\boxed{\sigma_{\overline{X}} = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n(n-1)}}}$$

# Θεωρία Σφαλμάτων

## **Διαφορά τυπικής απόκλισης** και **τυπικού σφάλματος**

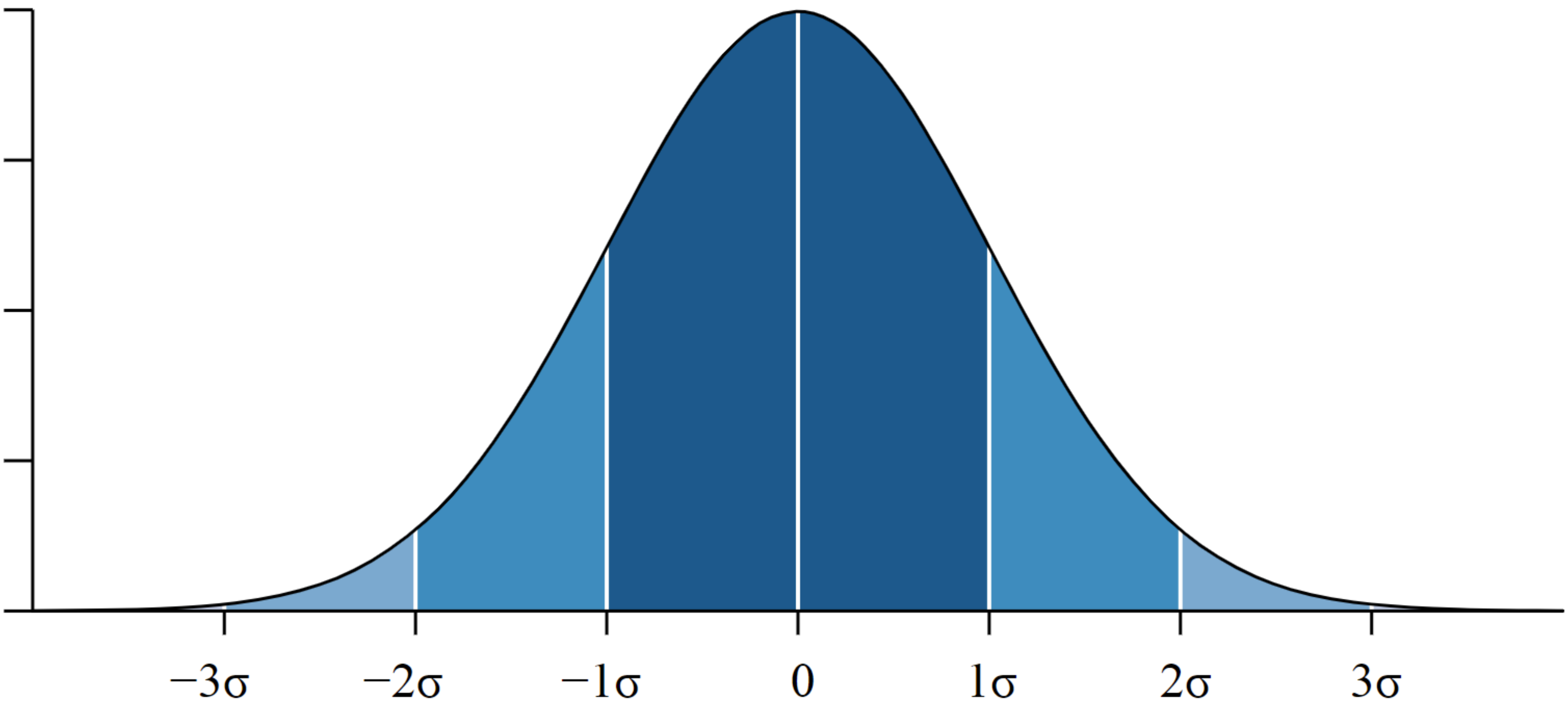
- Οι έννοιες **τυπική απόκλιση** και **τυπικό σφάλμα** πολλές φορές συγχέονται.
- Για λόγους σαφήνειας, από εδώ και στο εξής θα διαχωρίσουμε την έννοια **Τυπική Απόκλιση** και **Τυπικό Σφάλμα της καλύτερης (μέσης) τιμής**.

| **Τυπική Απόκλιση** | **Τυπικό Σφάλμα της καλύτερης τιμής** |
|---|---|
| Είναι μέτρο διασποράς του συνόλου τιμών από το μέσο όρο τους. | Το τυπικό σφάλμα είναι η τυπική απόκλιση των μέσων τιμών. |
| Διευκρινίζει την ποσότητα διακύμανσης και στις δύο πλευρές του μέσου όρου. | Είναι μικρότερο από τις τυπικές αποκλίσεις των μεμονωμένων μετρήσεων. |
| Δείχνει την κατανομή της παρατήρησης σχετικά με την κανονική καμπύλη. | Δείχνει την κατανομή της εκτίμησης σχετικά με την κανονική καμπύλη. |

Με λίγα λόγια, **η τυπική απόκλιση** μετρά τη διασπορά των τιμών από την κεντρική τιμή. Το **τυπικό σφάλμα της καλύτερης τιμής** δείχνει την τυπική απόκλιση των μέσων τιμών και χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της αξιοπιστίας και της ακρίβειας της εκτίμησης.

## Θεωρία Σφαλμάτων

Γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας των $\boldsymbol{\upsilon_i}$




https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9A%CE%B1%CF%84%CE%B1%CE%BD%CE%BF%CE%BC%CE%AE_%CF%80%CE%B9%CE%B8%CE%B1%CE%BD%CF%8C%CF%84%CE%B7%CF%84%CE%B1%CF%82

## Θεωρία Σφαλμάτων

### Διαστήματα εμπιστοσύνης

Το πλήθος των ενδεχόμενων τιμών ενός μετρούμενου μεγέθους από το οποίο προκύπτει η ακριβής τιμή (**μ**), ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Η συνάρτηση πυκνοτήτων των ενδεχόμενων τιμών δίνεται από:

$$\boxed{y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

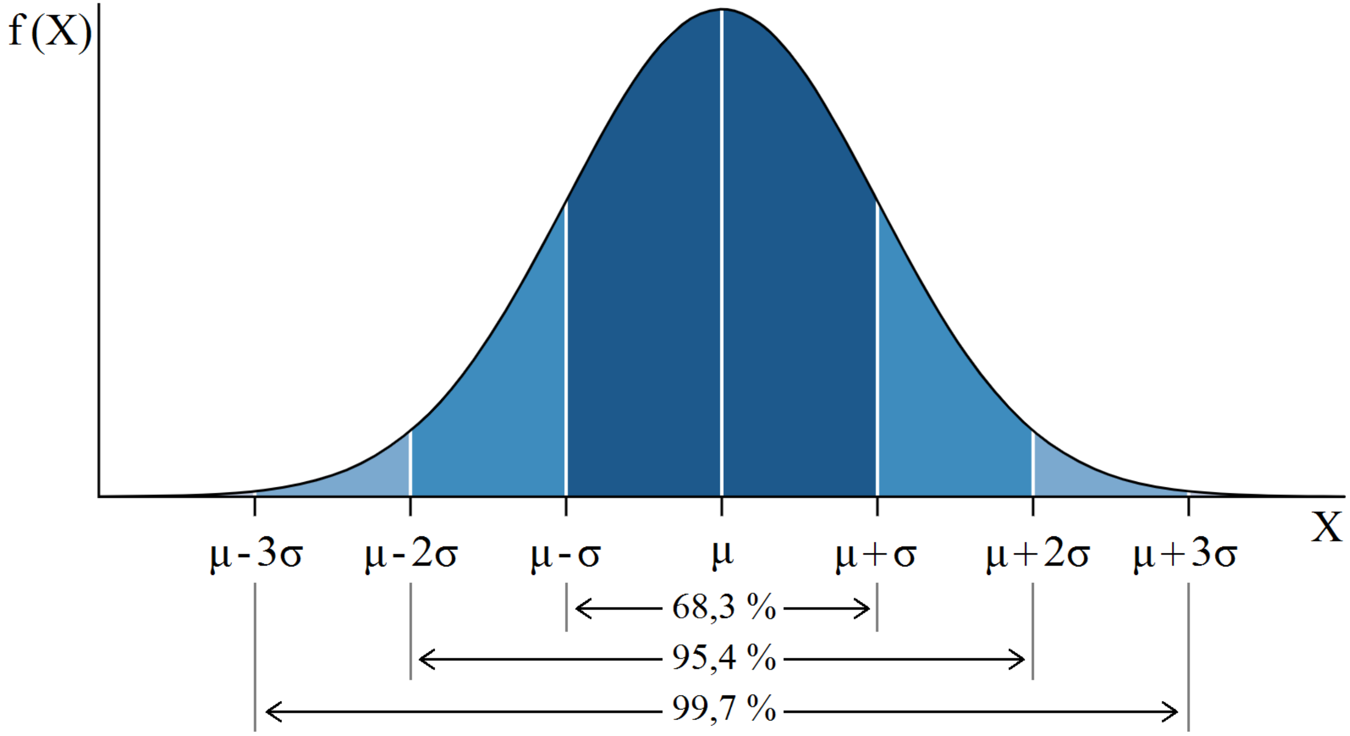
Η πιθανότητα (P) μία ενδεχόμενη τιμή (x) του μεγέθους να βρίσκεται στα διαστήματα [μ-σ, μ+σ], [μ-2σ, μ+2σ], [μ-3σ, μ+3σ] δίνεται από το εμβαδόν της γραφικής παράστασης ανάμεσα στα σημεία και είναι:

- P( μ-σ < x < μ+σ ) = 0,6826 = **68,3 %**
- P( μ-2σ < x < μ+2σ ) = **95,4 %**
- P( μ-3σ < x < μ+3σ ) = **99,7 %**

## Θεωρία Σφαλμάτων

### Διαστήματα εμπιστοσύνης

- Η πιθανότητα ονομάζεται **επίπεδο εμπιστοσύνης**.
- Το διάστημα που συνδέεται με την αντίστοιχη πιθανότητα ονομάζεται **διάστημα εμπιστοσύνης**.



## Θεωρία Σφαλμάτων

**Ακρίβεια – Ορθότητα**

Η **ακρίβεια** των παρατηρήσεων σχετίζεται άμεσα με το πόσο μεγάλα ή μικρά είναι κατά απόλυτη τιμή τα σφάλματά τους.

**Ακρίβεια** ⟶ Πόσο κοντά είναι οι παρατηρήσεις μεταξύ τους.

- Εξαρτάται από το μέγεθος των τυχαίων σφαλμάτων.
- Μπορεί να εκτιμηθεί από παρατηρήσεις που έγιναν με το ίδιο σύστημα «Παρατηρητής – Όργανο – Συνθήκες».
- Εξαρτάται από την ευαισθησία του οργάνου και από την ικανότητα του παρατηρητή.

**Ορθότητα** ⟶ Πόσο κοντά είναι οι παρατηρήσεις στην αληθινή τιμή.

- Εξαρτάται από τα συστηματικά σφάλματα που δεν έχουν εξαλειφθεί.
- Δεν μπορεί να εκτιμηθεί από παρατηρήσεις με το ίδιο σύστημα.

**Αξιοπιστία**: Ο συνδυασμός ακρίβειας και ορθότητας

**Βαθμονόμηση**: Η διαδικασία εντοπισμού και εξάλειψης των σφαλμάτων.

## Θεωρία Σφαλμάτων

### Ισοβαρείς – Ανισοβαρείς Παρατηρήσεις

Οι παρατηρήσεις που έγιναν με το ίδιο σύστημα «Παρατηρητής – Όργανο – Συνθήκες» λέγονται **ισοβαρείς**.

- Έχουν όλες την ίδια βαρύτητα στην εκτίμηση της ακριβούς τιμής.

Η ακριβής τιμή δίνεται από:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{[X]}{n}}$$

Η τυπική απόκλιση δίνεται από:

$$\boxed{\sigma = \pm\sqrt{\frac{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \ldots + \upsilon_n^2}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n-1}}}$$

Το τυπικό σφάλμα της καλύτερης τιμής $\bar{X}$ δίνεται από:

$$\boxed{\sigma_{\overline{X}} = \pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \pm\sqrt{\frac{[\upsilon\upsilon]}{n(n-1)}}}$$

όπου $\upsilon_i = X_i - \overline{X}$

και $n$ το πλήθος των παρατηρήσεων

Ο παράγοντας (***n*-1**) λέγεται **βαθμός ελευθερίας**.

## Θεωρία Σφαλμάτων

### Ισοβαρείς – Ανισοβαρείς Παρατηρήσεις

Όταν διαφοροποιείται το σύστημα «Παρατηρητής – Όργανο – Συνθήκες», οι παρατηρήσεις λέγονται **ανισοβαρείς**.

- Κάθε παρατήρηση συμμετέχει με διαφορετική βαρύτητα στην εκτίμηση της ακριβούς τιμής.
- Η διαφορετική βαρύτητα εκφράζεται με έναν αδιάστατο αριθμό που ονομάζεται **βάρος (P)**.
- Το βάρος αποτελεί μέτρο αξιοπιστίας για μία μέτρηση.
- Είναι αντιστρόφως ανάλογο της μεταβλητότητας $\sigma^2$.

$$\boxed{P = \frac{c}{\sigma^2}}$$ όπου $c$ σταθερά

## Θεωρία Σφαλμάτων

### Ισοβαρείς – Ανισοβαρείς Παρατηρήσεις

**Παράδειγμα**

Έστω μία απόσταση **L** η οποία μετρήθηκε σε δύο διαδοχικές ημέρες.

Μετρήθηκε τρεις (3) φορές την 1η ημέρα και πέντε (5) φορές τη 2η ημέρα.

Η τιμή της 1ης ημέρας είναι:

$$\boxed{\overline{L}_A = \frac{L_1 + L_2 + L_3}{3}}$$

Η τιμή της 2ης ημέρας είναι:

$$\boxed{\overline{L}_B = \frac{L_1^{'} + L_2^{'} + L_3^{'} + L_4^{'} + L_5^{'}}{5}}$$

Άρα η ακριβής τιμή της απόστασης δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\overline{L} = \frac{L_1 + L_2 + L_3 + L_1^{'} + L_2^{'} + L_3^{'} + L_4^{'} + L_5^{'}}{3+5} = \frac{3\overline{L}_A + 5\overline{L}_B}{8}}$$

Παρατηρούμε ότι τα βάρη των τιμών $\overline{L}_B$ και $\overline{L}_B$ είναι $\boxed{\boldsymbol{P_A = 3}}$ και $\boxed{\boldsymbol{P_B = 5}}$

## Θεωρία Σφαλμάτων

### Ισοβαρείς – Ανισοβαρείς Παρατηρήσεις

Άρα οι σχέσεις που ισχύουν για τις ανισοβαρείς παρατηρήσεις είναι:

Η ακριβής τιμή δίνεται από:

$$\overline{X} = \frac{P_1 X_1 + P_2 X_2 + \ldots + P_n X_n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n} = \frac{[PX]}{[P]}$$

Η τυπική απόκλιση δίνεται από:

$$\hat{\sigma}_0 = \pm\sqrt{\frac{P_1 \upsilon_1^2 + P_2 \upsilon_2^2 + \ldots + P_n \upsilon_n^2}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{[P\upsilon\upsilon]}{n-1}}$$

Το τυπικό σφάλμα **της καλύτερης τιμής** δίνεται από:

$$\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \pm\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{P}} = \pm\sqrt{\frac{[P\upsilon\upsilon]}{P(n-1)}}$$

Οι ποσότητες $\hat{\sigma}_0$ και $\hat{\sigma}_{\overline{X}}$ χαρακτηρίζονται ως **a posteriori**.

## Θεωρία Σφαλμάτων

### Νόμος μετάδοσης σφαλμάτων

Στη γεωδαισία τα μεγέθη μπορούν να μετρηθούν:

- Απευθείας με τη χρήση γεωδαιτικών οργάνων.
- Με χρήση μαθηματικών σχέσεων, και χρησιμοποιώντας τα πρωτογενή μετρούμενα μεγέθη.

Τα σφάλματα που γίνονται στις μετρήσεις μεταφέρονται στα μεγέθη που προκύπτουν από υπολογισμούς.

Ως εκ τούτου, το σφάλμα ενός υπολογιζόμενου μεγέθους εμπεριέχει τα σφάλματα που φέρουν όλα τα πρωτογενή μετρούμενα μεγέθη από τα οποία υπολογίζεται.

Το σφάλμα αυτό υπολογίζεται από το **Νόμο Μετάδοσης Σφαλμάτων**.

## Θεωρία Σφαλμάτων

### Νόμος μετάδοσης σφαλμάτων

Αν ζητείται η τυπική απόκλιση (ή το τυπικό σφάλμα) $\boldsymbol{\sigma_y}$ της συνάρτησης (του μεγέθους) $\boldsymbol{y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ το οποίο έχει προκύψει από τις $\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_n}$ ανεξάρτητες μετρήσεις με τυπικές αποκλίσεις $\boldsymbol{\sigma_{x1}, \sigma_{x2}, \dots, \sigma_{xn}}$ , εφαρμόζεται ο νόμος μετάδοσης σφαλμάτων μέσω της σχέσης:

$$\boxed{\sigma_y = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \sigma_{x_2}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 \cdot \sigma_{x_n}^2}}$$

όπου $\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}$ είναι οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $\boldsymbol{y}$.

# Στοιχεία Γεωδαισίας

## Βιβλιογραφία


- Μαθήματα Γεωδαισίας, 2η Έκδοση, Γ. Γεωργόπουλος, Εκδόσεις Τζιόλα, 2019.
- Στοιχεία Τοπογραφίας, Ε. Στυλιανίδη, Εκδόσεις Δίσιγμα, 2011.
- Εφαρμοσμένη Γεωδαισία, 2η έκδοση, Ε. Λάμπρου, Γ. Πανταζής, Εκδόσεις Ζήτη, 2010.