Σημειώσεις διαλέξεων «Τεχνική Μηχανική»

Διάλεξη 5
04/04/2023

Λευθεριώτης Γεώργιος
Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Πατρών

Δικτυώματα

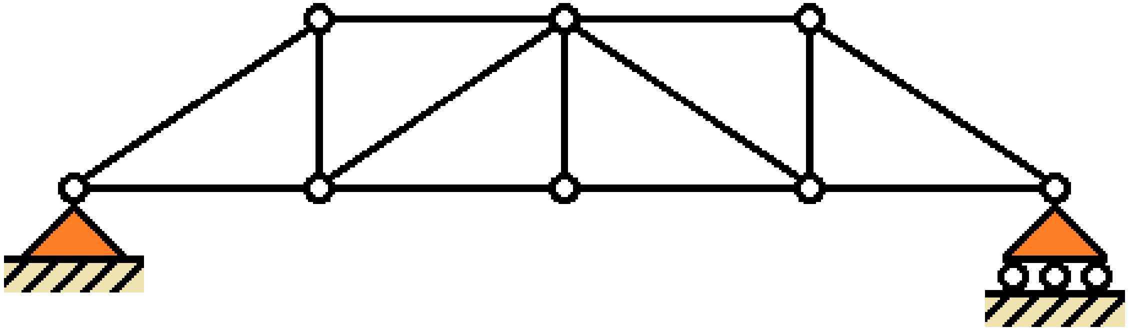
Δικτυώματα ή δικτυωτοί φορείς είναι οι φορείς εκείνοι που σχηματίζονται από ευθύγραμμες ράβδους συνδεδεμένες μεταξύ τους με αρθρώσεις.

Οι ράβδοι μεταφέρουν **μόνο** αξονικές δυνάμεις (εφελκυστικές και θλιπτικές).

Τα δικτυώματα χρησιμοποιούνται ευρέως σε διάφορες τεχνικές κατασκευές, όπως στέγαστρα, γέφυρες, πυλώνες ηλεκτρικού ρεύματος κτλ.

Κατασκευάζονται από χάλυβα (μεταλλικές κατασκευές), από αλουμίνιο (ελαφρές κατασκευές) ή και από ξύλο (ξύλινες κατασκευές).

Ο κύριος λόγος χρήσης των δικτυωμάτων είναι η επίτευξη οικονομίας μέσω της μείωσης του ιδίου βάρους των κατασκευών.



Δικτυώματα

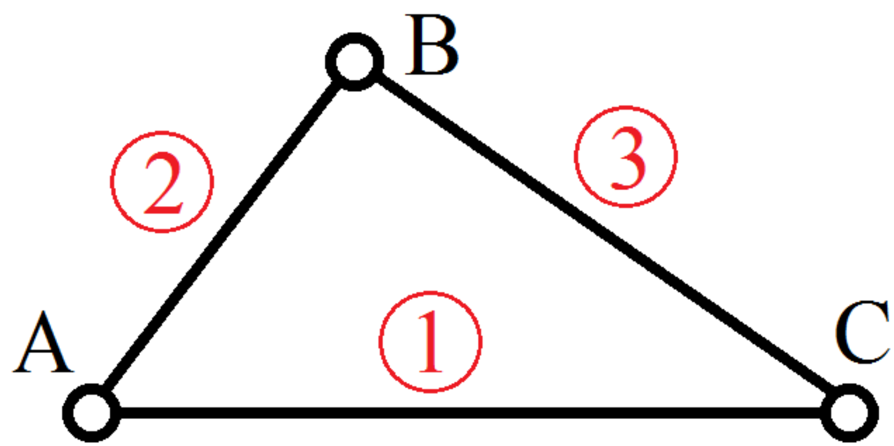
Τα δικτυώματα διακρίνονται σε επίπεδα και χωρικά.

Επίπεδο δικτύωμα είναι αυτό στο οποίο όλες οι ράβδοι του και η φόρτισή του ανήκουν σε ένα επίπεδο. Σε αντίθετη περίπτωση ονομάζεται **χωρικό δικτύωμα** ή **δικτύωμα στο χώρο**.

Στην πραγματικότητα όλα τα δικτυώματα λειτουργούν στο χώρο, αλλά η μελέτη και επίλυσή τους γίνεται στο επίπεδο για διευκόλυνση.

Απλό ή πλήρες ονομάζεται ένα δικτύωμα όταν η στερεότητά του χάνεται μετά την αφαίρεση μίας οποιασδήποτε ράβδου του. Το απλούστερο πλήρες δικτύωμα είναι το **αρθρωτό τρίγωνο**.

Το αρθρωτό τρίγωνο είναι ένας στέρεος σχηματισμός και αποτελεί το λεγόμενο «**βασικό δικτύωμα**».



Δικτυώματα

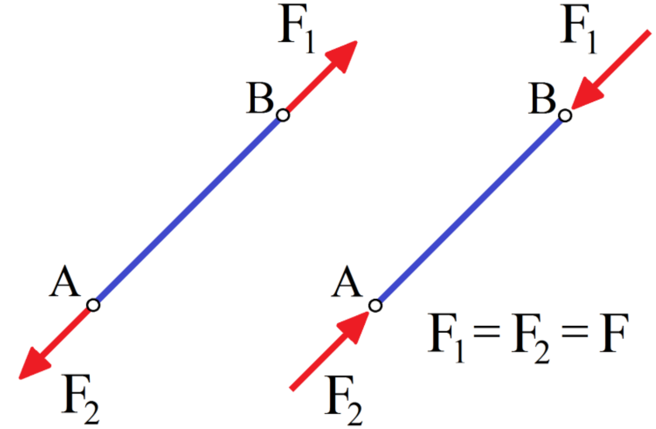
Ιδανικό ή ιδεατό δικτύωμα ονομάζεται εκείνο για το οποίο ισχύουν τα εξής:

- Οι ράβδοι θεωρούνται **αβαρείς** και οι άξονές τους ευθύγραμμοι.
- Η σύνδεση των ράβδων θεωρείται **ιδανική**, δηλαδή αρθρώσεις χωρίς τριβές.
- Τα εξωτερικά φορτία (δυνάμεις) ενεργούν **αποκλειστικά** στους κόμβους.
- Οι ράβδοι καταπονούνται **μόνο αξονικά**, όχι εγκάρσιά.

Με βάση τα παραπάνω, οι ράβδοι δέχονται δυνάμεις μόνο στα δύο άκρα, από δράσεις άλλων κόμβων ή από εξωτερικές δυνάμεις στα σημεία αυτά.

Αφού η ράβδος ισορροπεί, οι δυνάμεις αυτές θα είναι ίσου μέτρου αλλά αντίθετης φοράς και θα βρίσκονται στην ίδια γραμμή ενέργειας.

Δηλαδή κάθε ράβδος του ιδανικού δικτυώματος ισορροπεί καταπονούμενη σε εφελκυσμό ή σε θλίψη.



Δικτυώματα

Εντατικά Μεγέθη Διατομής N(x), V(x), M(x)

Κάθε δύναμη η οποία είναι παράλληλη με το διαμήκη άξονα μίας δοκού θεωρείται **αξονική** και συμβολίζεται με το γράμμα **N**.

Κάθε δύναμη η οποία είναι κάθετη θεωρείται **τέμνουσα** και συμβολίζεται με το γράμμα **V**.

Η **καμπτική ροπή** ή **ροπή κάμψης** σε μία δοκό συμβολίζεται με το γράμμα **M**.

Άρα σε τυχαίο σημείο μίας δοκού ασκούνται:

1. **Η Αξονική δύναμη N(x)**
2. **Η Τέμνουσα δύναμη V(x)**
3. **Η Καμπτική Ροπή M(x)**

Τα μεγέθη αυτά ονομάζονται **φορτία διατομής** ή **εντατικά μεγέθη**.

Δικτυώματα

Άρα αν σε μία ράβδο ιδανικού δικτυώματος εξεταστεί μία τυχαία διατομή της, από την ισορροπία δυνάμεων προκύπτει ότι:

$$\boxed{\left|N(x)\right| = F \ , \quad V(x) = 0 \ , \quad M(x) = 0}$$

Δηλαδή σε κάθε ράβδο του ιδανικού δικτυώματος αναπτύσσεται **μόνο** αξονική δύναμη, η οποία είναι σταθερή καθ’ όλο το μήκος της, ενώ η ροπή κάμψης και η τέμνουσα δύναμη είναι μηδενικές.

Αφού λοιπόν τα [V] και [M] είναι μηδενικά, ενώ το [N] είναι σταθερό, αρκεί **μόνο** να βρεθούν **η τιμή και το πρόσημο της [N]** κατά την επίλυση των δικτυωμάτων. Δεν χρειάζεται να σχεδιάσουμε τα διαγράμματα.

Σε ότι αφορά το πρόσημο, το “**+**” δηλώνει **εφελκυσμό** και το “**-**” **θλίψη**.

Προηγείται πάντα ο υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης μέσω των τριών (3) Στερεοστατικών Εξισώσεων Ισορροπίας, όπως είδαμε στις δοκούς.

Δικτυώματα

Ισοστατικότητα και στερεότητα δικτυωμάτων

Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε δικτύωμα ***k*** κόμβων τότε ο αριθμός των ράβδων που απαιτούνται για να είναι το δικτύωμα στέρεο, θα είναι ίσος με:

$$\boxed{\rho = 2k - 3}$$

Γενικεύοντας, αν ***Α*** είναι ο αριθμός των αντιδράσεων, τότε η ολική συνθήκη για την ισοστατικότητα του δικτυώματος είναι:

$$\boxed{\rho + A = 2k}$$

Η παραπάνω συνθήκη είναι **αναγκαία**, αλλά **όχι επαρκής** για τη στερεότητα του δικτυώματος. Ικανοποιεί την αριθμητική επάρκεια των ράβδων, αλλά δεν ελέγχει την καταλληλότητα της διάταξης.

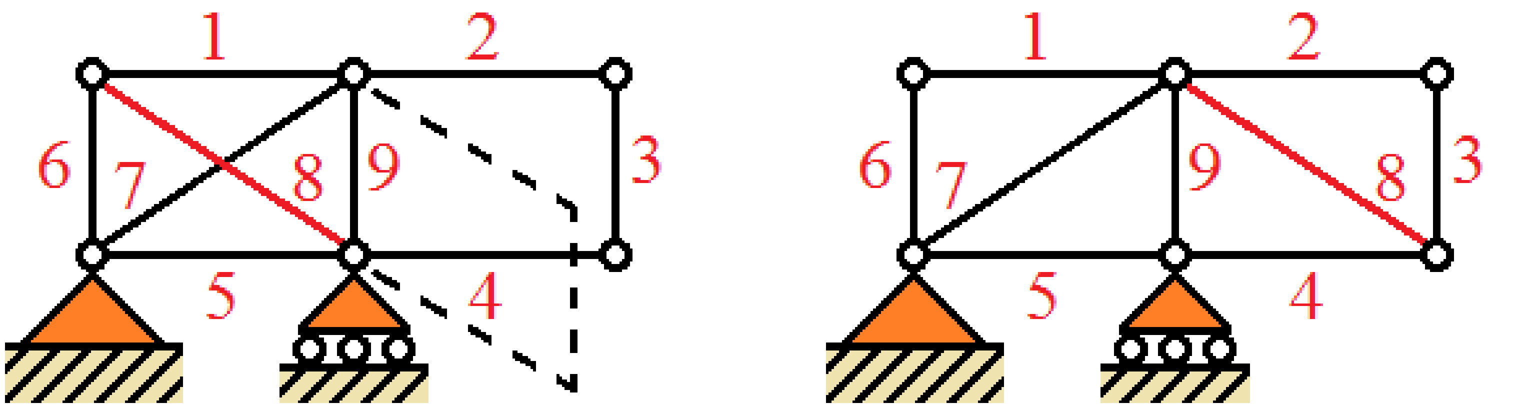
Δικτυώματα

Ισοστατικότητα και στερεότητα δικτυωμάτων

Για παράδειγμα στα δικτυώματα του παρακάτω σχήματος έχουμε 6 κόμβους και 3 αντιδράσεις. Ο αριθμός των ράβδων που απαιτούνται θα είναι ίσος με:

$$\boxed{\rho = 2 \cdot k - 3 = 2 \cdot 6 - 3 = 9}$$

Η συνθήκη ικανοποιείται και στα δύο. Παρόλα αυτά, στο αριστερό δικτύωμα ο τομέας που αποτελείται από τις ράβδους 2349 μπορεί να κινείται, ενώ ο τομέας που αποτελείται από τις ράβδους 156789 έχει μία περιττή ράβδο. Αν η ράβδος 8 μεταφερθεί όπως στο δεξί δικτύωμα, τότε αποκαθίσταται η στερεότητα.



Δικτυώματα

Μέθοδοι επίλυσης επίπεδων δικτυωμάτων

Η ανάλυση ενός δικτυώματος επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό των αντιδράσεων των στηρίξεων και των αξονικών δυνάμεων των ράβδων του δικτυώματος.

Για ισοστατικά δικτυώματα, ο υπολογισμός αυτός γίνεται με αποκλειστική χρήση των εξισώσεων ισορροπίας.

Για την ανάλυση των ισοστατικών δικτυωμάτων εφαρμόζονται δύο υπολογιστικές μέθοδοι:

1. Η **μέθοδος των κόμβων** η οποία βασίζεται στην απομόνωση και την εφαρμογή των εξισώσεων ισορροπίας σε κάθε κόμβο.
2. Η **μέθοδος των τομών Ritter** η οποία βασίζεται στην ισορροπία τμήματος του δικτυώματος, μετά από νοητή τομή.

Όταν απαιτείται ο υπολογισμός των αξονικών δυνάμεων σε όλες τις ράβδους του δικτυώματος, τότε προτιμάται η μέθοδος των κόμβων.

Δικτυώματα

Μέθοδος των κόμβων

Εφόσον το δικτύωμα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, τότε κάθε κόμβος του πρέπει να ισορροπεί. Τα βήματα για τον υπολογισμό των αγνώστων είναι τα εξής:

1. Υπολογίζουμε τις αντιδράσεις στήριξης με χρήση των 3 εξισώσεων ισορροπίας.
2. Σχεδιάζουμε κάθε κόμβο αυτόνομα από το υπόλοιπο δικτύωμα με κατάλληλες τομές.
3. Στις θέσεις των τομών αναγράφονται οι αξονικές δυνάμεις των κομμένων ράβδων, τα εξωτερικά φορτία και οι αντιδράσεις στήριξης.
4. Για κάθε κόμβο αναλύουμε τις δυνάμεις σε άξονες με χρήση του κόμβου σαν αρχή του συστήματος αξόνων και χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις ισορροπίας του κόμβου:

$$\boxed{\sum F_x = 0 \,, \quad \sum F_y = 0}$$

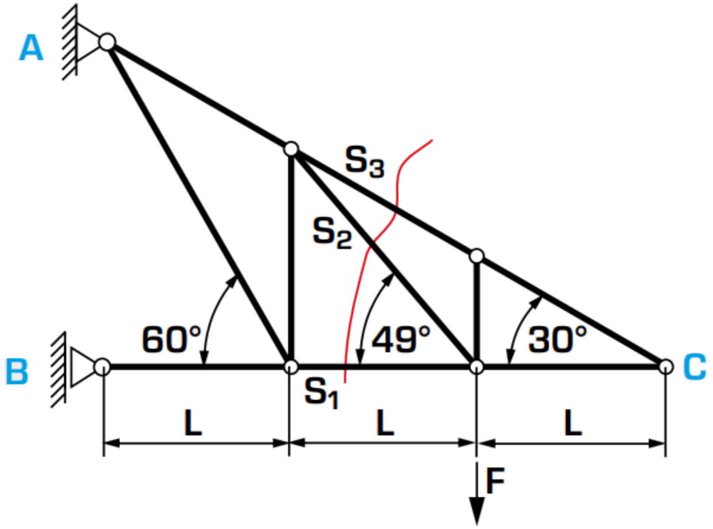
5. Επιλύουμε το σύστημα των ***2k*** εξισώσεων που προέκυψαν και προσδιορίζουμε τις αξονικές δυνάμεις και τις αντιδράσεις στήριξης.

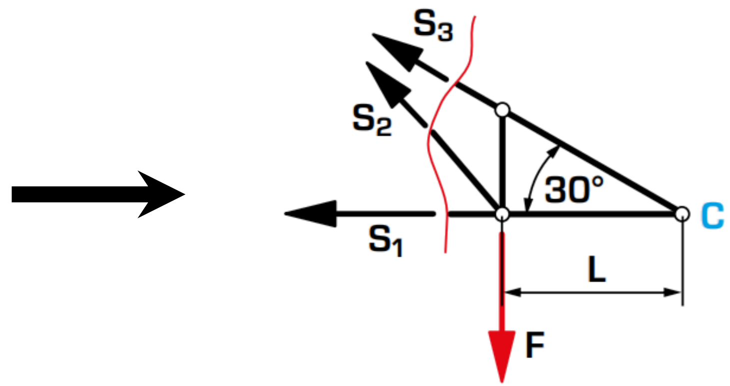
Δικτυώματα

Μέθοδος των τομών Ritter

Χρησιμοποιείται όταν δεν μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των κόμβων ή για τον ταχύτερο υπολογισμό της δύναμης σε μία ράβδο.

Η μέθοδος περιλαμβάνει τη χρήση τομών οι οποίες τέμνουν τρεις ράβδους του δικτυώματος και διαχωρίζουν το δικτύωμα σε δύο ή περισσότερα ανεξάρτητα τμήματα, εφαρμόζοντας τις δυνάμεις στις θέσεις των τομών.



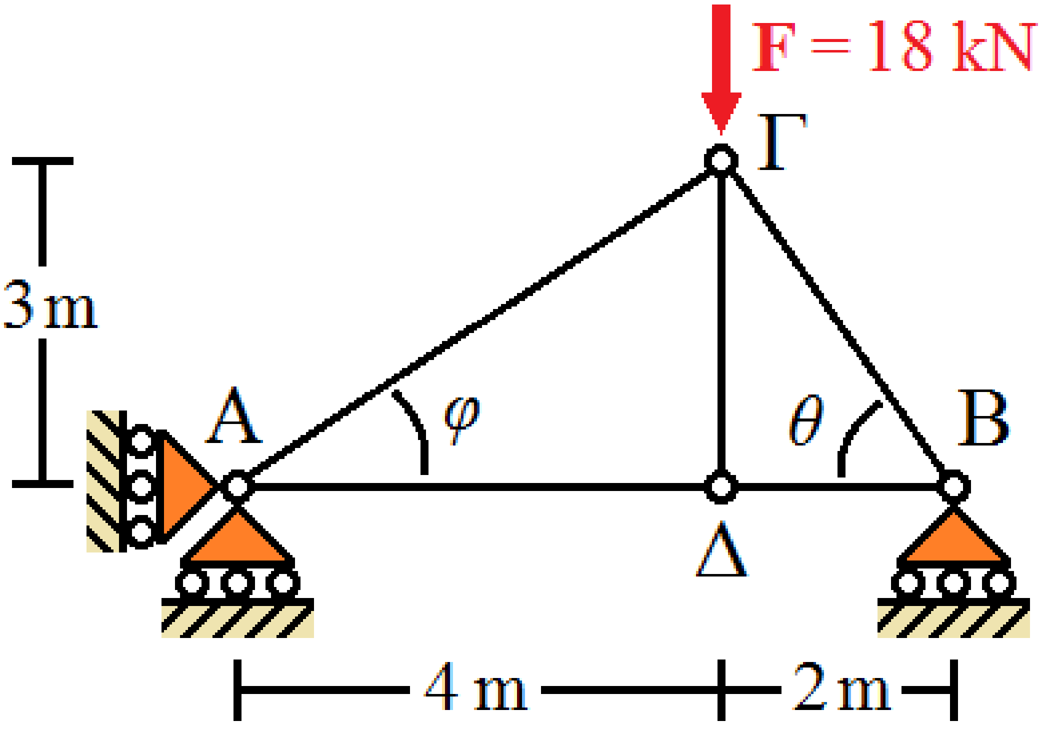


https://www.gunt.de/images/download/Methods-of-section-for-plane-trusses-basic-knowledge_english.pdf

Δικτυώματα

Μέθοδος των κόμβων – Παράδειγμα

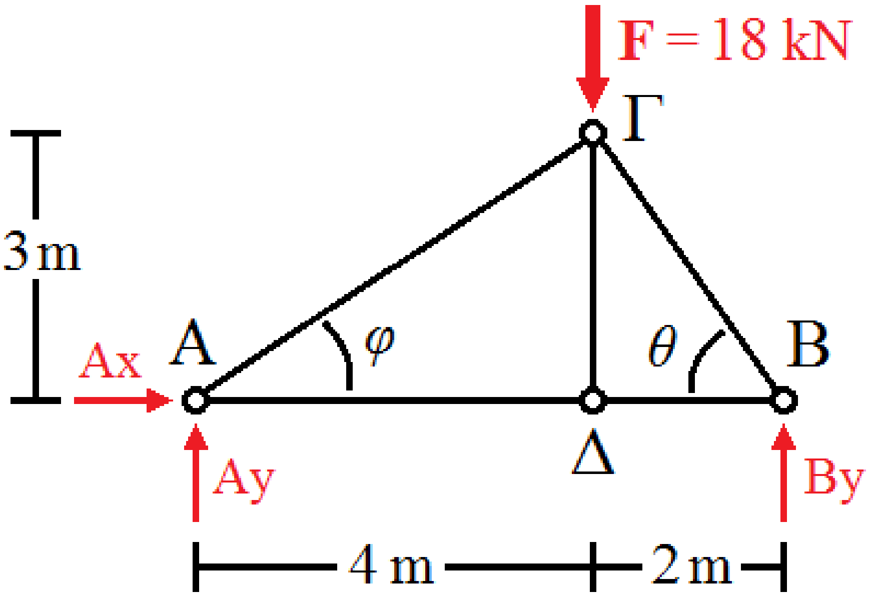
Να αποδειχτεί ότι το δικτύωμα του παρακάτω σχήματος είναι ισοστατικό και να βρεθούν οι αντιδράσεις στήριξης και οι αξονικές δυνάμεις όλων των ράβδων.



Δικτυώματα

Μέθοδος των κόμβων – Παράδειγμα

Αρχικά αντικαθιστούμε τις στηρίξεις με τις αντιδράσεις στήριξης $\mathbf{A_x}$, $\mathbf{A_y}$ και $\mathbf{B_y}$. Το γεγονός ότι έχουμε δύο κυλίσεις στο **A** δεν πρέπει να μας μπερδεύει. Έχουμε από μία κάθετη αντίδραση σε κάθε κύλιση, δηλαδή είναι σαν να είχαμε μία άρθρωση.



Το δικτύωμα αποτελείται από 5 ράβδους (άρα **ρ = 5**), έχει 4 κόμβους (άρα **k = 4**), και 3 αντιδράσεις στήριξης (άρα **A = 3**).

Για να είναι ισοστατικό πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\boxed{\rho + A = 2k}$$

$$\rho + A = 2k \Rightarrow 5 + 3 = 2 \cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 = 8 \;\Rightarrow\; \text{ισοστατικό} \;\checkmark$$

Δικτυώματα

Μέθοδος των κόμβων – Παράδειγμα

Άρα αφού το δικτύωμα είναι ισοστατικό μπορεί να επιλυθεί τόσο ως προς τις αντιδράσεις στήριξης και ως προς τις αξονικές δυνάμεις των ράβδων.

Υπολογισμός αντιδράσεων στήριξης

Στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας

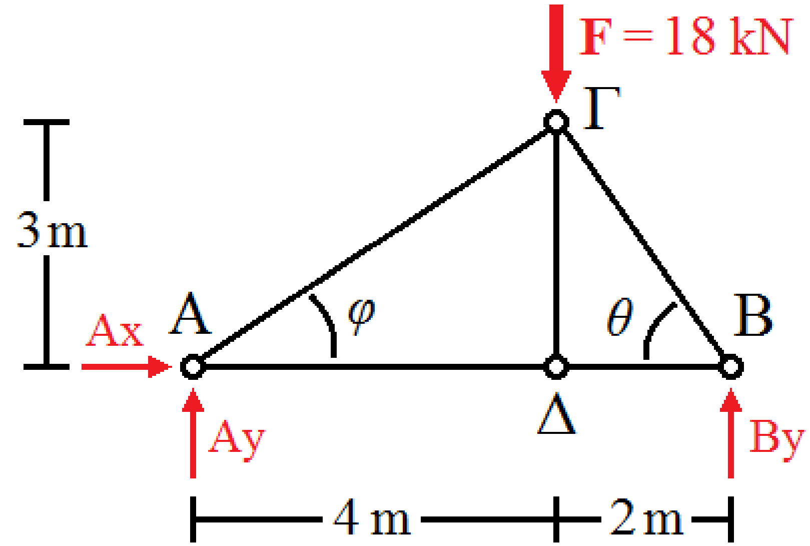
$$\overset{+}{\rightarrow}\ \Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\circlearrowleft +\ \Sigma M_A = 0 \Rightarrow -F \cdot 4m + B_y \cdot 6m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_y \cdot 6m = 18kN \cdot 4m \Rightarrow \boxed{B_y = 12kN}$$

$$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - F + B_y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_y = F - B_y \Rightarrow \boxed{A_y = 6kN}$$



Δικτυώματα

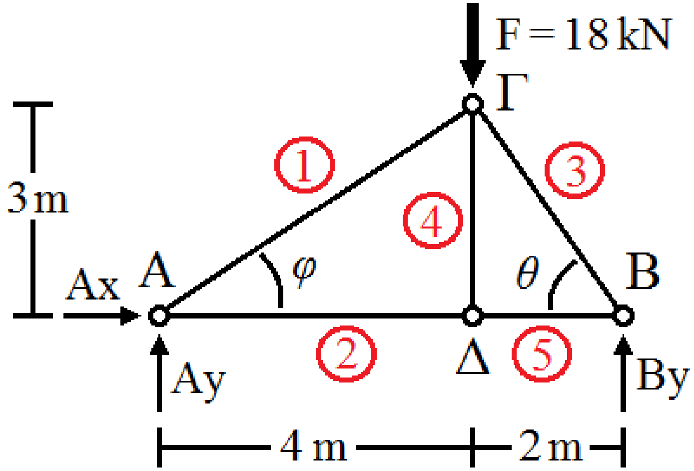
Μέθοδος των κόμβων – Παράδειγμα

Υπολογισμός αξονικών δυνάμεων στις ράβδους

Απαριθμούμε τις ράβδους του δικτυώματος από 1 έως 5, και συμβολίζουμε με $\boldsymbol{N_i}$ τις αξονικές δυνάμεις κάθε ράβδου.

Αρχικά τις θεωρούμε όλες εφελκυστικές και αν κάποια προκύψει αρνητική, τότε αυτό σημαίνει ότι είναι θλιπτική.

Αφού θεωρούμε ότι οι ράβδοι εφελκύονται, οι δυνάμεις που ασκούνται στους κόμβους (λόγω δράσης - αντίδρασης) απομακρύνονται από αυτούς, αφού πρέπει να έχουν ίσα μέτρα και αντίθετη φορά με αυτές που ασκούνται στις ράβδους.

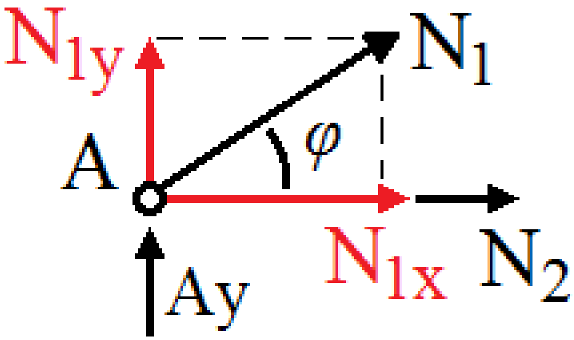


Δικτυώματα

Μέθοδος των κόμβων – Παράδειγμα

Υπολογισμός αξονικών δυνάμεων στις ράβδους

Κόμβος Α



Η γωνία φ δεν δίνεται αλλά μπορεί να υπολογιστεί εύκολα αφού το τρίγωνο **ΒΓΔ** είναι ορθογώνιο.

$$\tan\varphi = \frac{3}{4} = 0,75 \Rightarrow \boxed{\varphi = 36,87^{o}}$$

Στον κόμβο **Α** ασκείται η $\mathbf{A_y}$ ($\mathbf{A_x}$ = 0) και οι $\mathbf{N_1}$ και $\mathbf{N_2}$ από τις ράβδους 1 και 2.

Η δύναμη $\mathbf{N_1}$ αναλύεται στις κάθετες $\mathbf{N_{1x}}$ και $\mathbf{N_{1y}}$ στους άξονες x και y.

Στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας

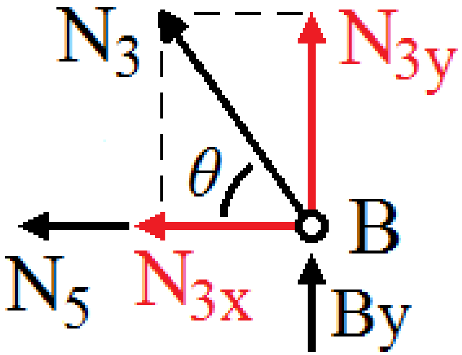
$$+\uparrow \quad \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + N_{1y} = 0 \Rightarrow N_{1y} = -6kN \Rightarrow N_1 \sin\varphi = -6kN \Rightarrow \boxed{N_1 = -10kN}$$

$$\xrightarrow{+} \quad \Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{1x} + N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = -N_{1x} \Rightarrow N_2 = -N_1\cos\varphi \Rightarrow \boxed{N_2 = 8kN}$$

Δικτυώματα

Μέθοδος των κόμβων – Παράδειγμα

Υπολογισμός αξονικών δυνάμεων στις ράβδους



Κόμβος Β

Η γωνία ϑ δεν δίνεται αλλά μπορεί να υπολογιστεί εύκολα αφού το τρίγωνο **ΑΓΔ** είναι ορθογώνιο.

$$\tan\theta = \frac{3}{2} = 1{,}5 \Rightarrow \boxed{\theta = 56{,}31^{o}}$$

Στον κόμβο **Β** ασκείται η $\mathbf{B_y}$ και οι $\mathbf{N_3}$ και $\mathbf{N_5}$ από τις ράβδους 3 και 5.

Η δύναμη $\mathbf{N_3}$ αναλύεται στις κάθετες $\mathbf{N_{3x}}$ και $\mathbf{N_{3y}}$ στους άξονες x και y.

Στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας

$$+\uparrow \quad \Sigma F_y = 0 \Rightarrow B_y + N_{3y} = 0 \Rightarrow N_{3y} = -12kN \Rightarrow N_3 \sin\theta = -12kN \Rightarrow \boxed{N_3 = -14{,}42kN}$$

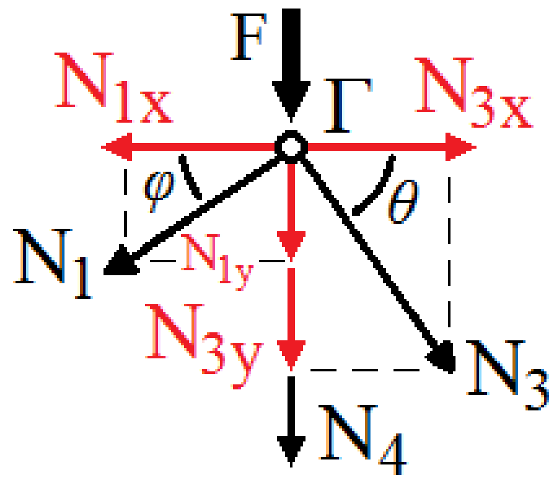
$$\overset{+}{\rightarrow} \quad \Sigma F_x = 0 \Rightarrow -N_{3x} - N_5 = 0 \Rightarrow N_5 = -N_{3x} \Rightarrow N_5 = -N_3 \cos\theta \Rightarrow \boxed{N_5 = 8kN}$$

Δικτυώματα

Μέθοδος των κόμβων – Παράδειγμα

Υπολογισμός αξονικών δυνάμεων στις ράβδους

Κόμβος Γ



Στον κόμβο **Γ** ασκείται η **F** και οι $\mathbf{N_1}$, $\mathbf{N_3}$, $\mathbf{N_4}$ από τις ράβδους 1, 3, 4. Οι $\mathbf{N_1}$ και $\mathbf{N_3}$ αναλύονται στις $\mathbf{N_{1x}}$, $\mathbf{N_{1y}}$, $\mathbf{N_{3x}}$ και $\mathbf{N_{3y}}$ οι οποίες είναι γνωστές από την ανάλυση των κόμβων **Α** και **Β**.

Στην περίπτωση αυτή ο μόνος άγνωστος είναι η αντίδραση $\mathbf{N_4}$

Στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας

$$+\uparrow \quad \Sigma F_y = 0 \Rightarrow -N_{1y} - N_{3y} - N_4 - F = 0 \Rightarrow N_4 = -N_{1y} - N_{3y} - F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_4 = -N_{1y} - N_{3y} - F \Rightarrow \boxed{N_4 = 0}$$

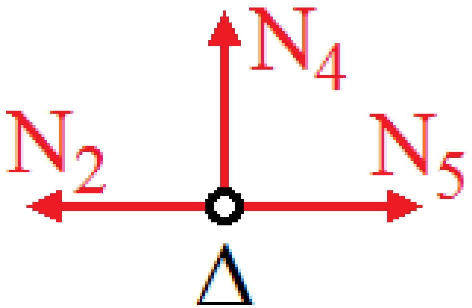
Δικτυώματα

Μέθοδος των κόμβων – Παράδειγμα

Υπολογισμός αξονικών δυνάμεων στις ράβδους

Κόμβος Δ

Στον κόμβο **Δ** δεν ασκείται καμία άγνωστη δύναμη αφού έχουν υπολογιστεί από τους άλλους κόμβους. Μπορούμε όμως να κάνουμε την επαλήθευση των τιμών που υπολογίσαμε.



Στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας

$$\overset{+}{\rightarrow}\quad \Sigma F_x = 0 \Rightarrow -N_2 + N_5 = 0 \Rightarrow N_2 = N_5 \Rightarrow \boxed{8kN = 8kN}\ ✓$$

$$+\uparrow\quad \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_4 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0}\ ✓$$

Άρα οι αντιδράσεις και οι δυνάμεις έχουν υπολογιστεί σωστά.

Δικτυώματα

Είδη Δικτυωμάτων Γεφυρών - Δικτύωμα Pratt

https://www.shop.cvmw.com/NScale150ftKit-Modern-Portal-1815.htm

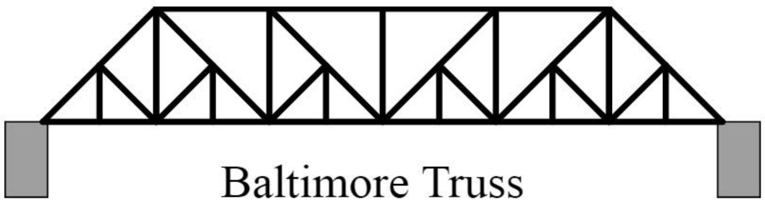
Δικτυώματα

Είδη Δικτυωμάτων Γεφυρών – Δικτύωμα Warren

http://www.stepankiskin.info/popsicle-stick-warren-through-truss-bridge-263df6b9/

Δικτυώματα

Είδη Δικτυωμάτων Γεφυρών – Δικτύωμα Baltimore

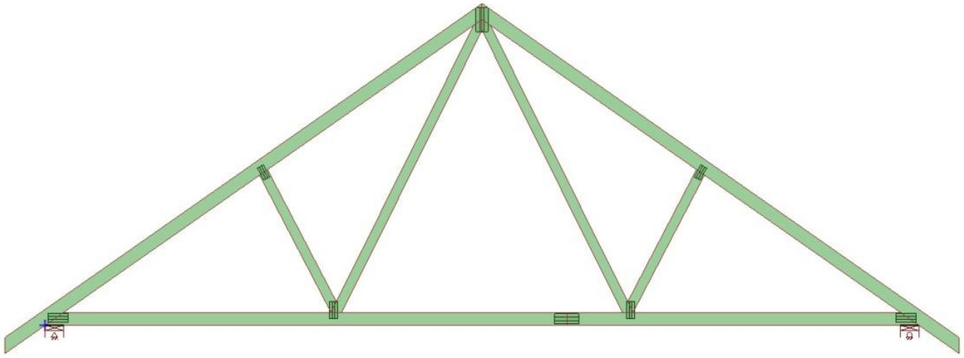


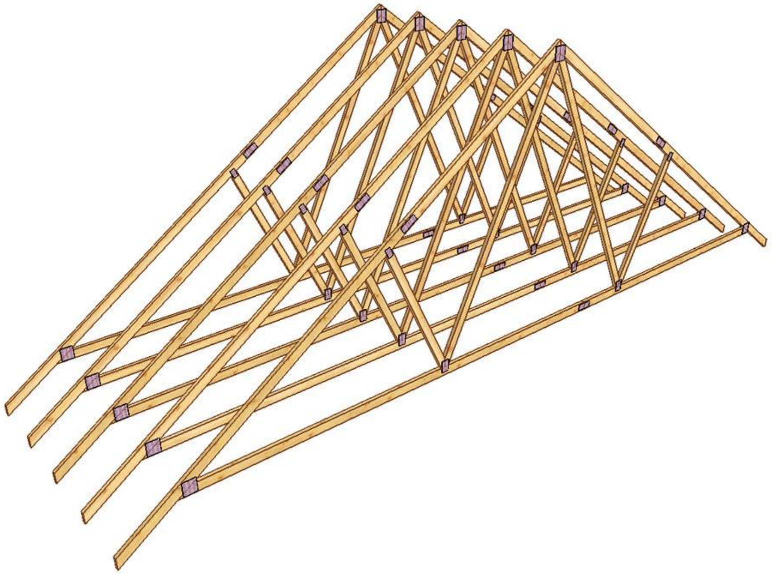
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Baltimore-truss.svg

https://pahistoricpreservation.com/metal-truss-bridges-survey-update/photo-4-3/

Δικτυώματα

Είδη Δικτυωμάτων Στεγών – Δικτύωμα Fink



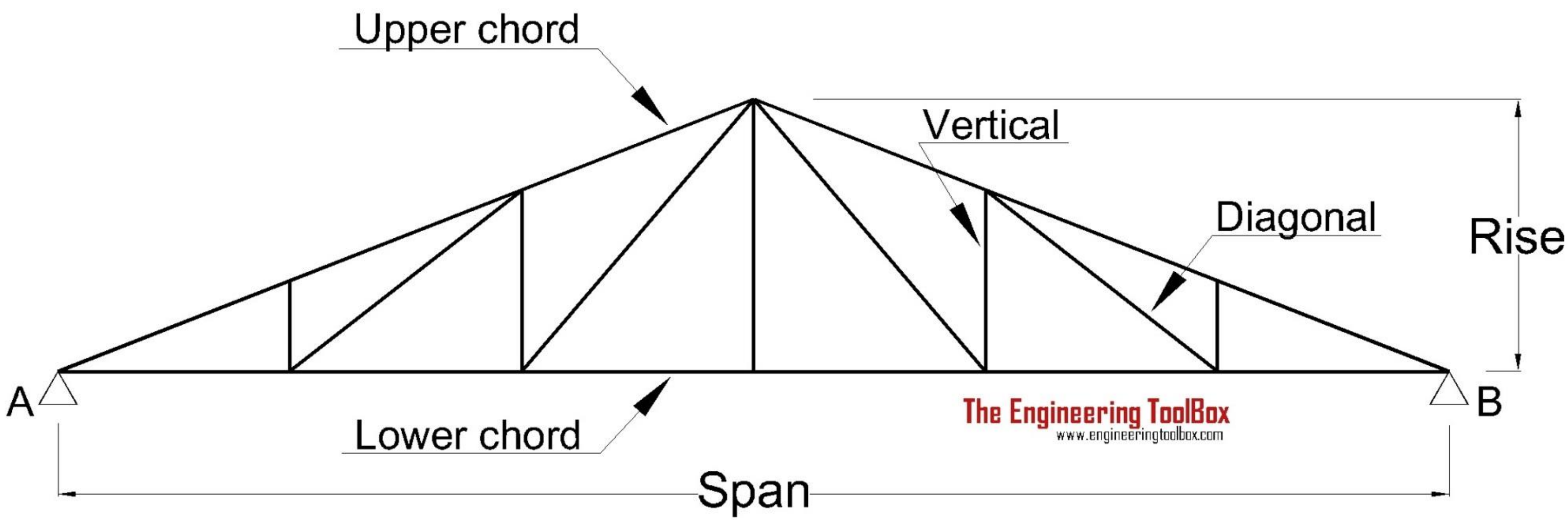


https://www.perrantrusses.co.uk/product/roof-trusses/standard-trusses-fink/

https://www.mbctimberframe.co.uk/fink-truss/

Δικτυώματα

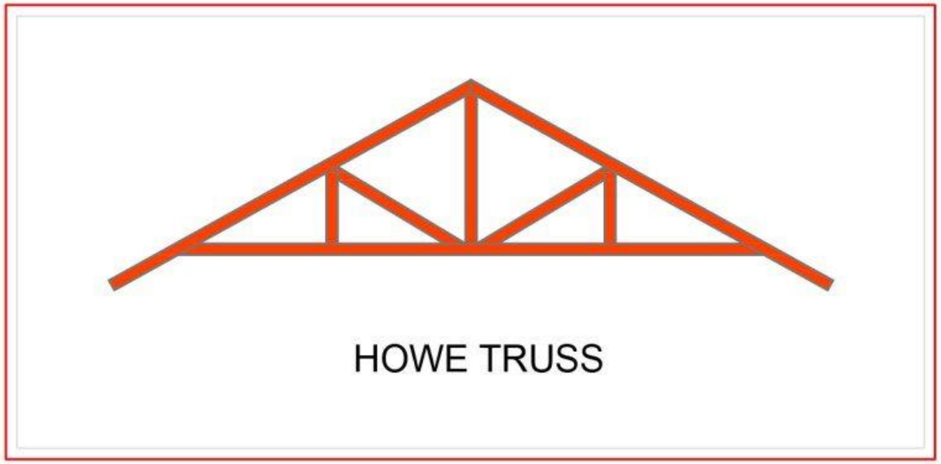
Είδη Δικτυωμάτων Στεγών – Δικτύωμα Pratt

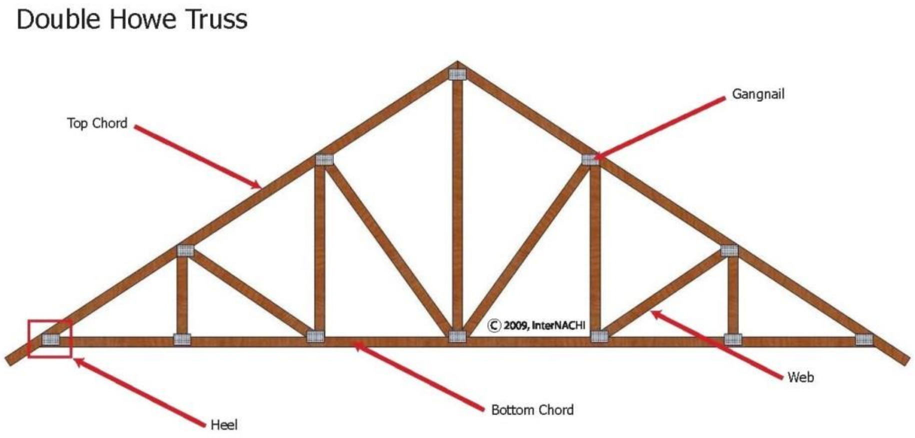


https://www.engineeringtoolbox.com/trusses-d_515.html

Δικτυώματα

Είδη Δικτυωμάτων Στεγών – Δικτύωμα Howe





https://www.pinterest.de/pin/267190190377515186/

www.nachi.org/gallery/framing-1/double-howe-truss

Τεχνική Μηχανική

Βιβλιογραφία

- Τεχνική Μηχανική - Στατική, Beer F, Johnston R, Mazurek D, 11η έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλα, 2018.
- Στατική - Μηχανική του Απαραμόρφωτου Στερεού, Π. Βουθούνης, 6η έκδοση, Εκδόσεις Α. Βουθούνη, 2017.
- Στατική και Αντοχή Υλικών, Α. Πολυζάκης, 2017.