



UNIVERSITY OF
PATRAS
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Σημειώσεις διαλέξεων «Τεχνική Μηχανική»

Διάλεξη 3
14/03/2023

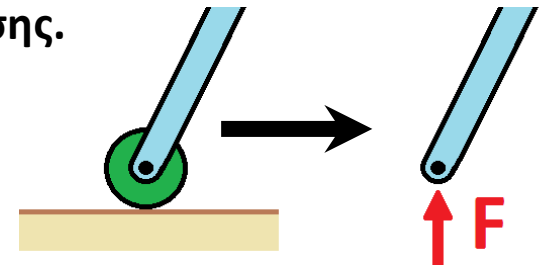
Λευθεριώτης Γεώργιος
Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Πατρών

Ισορροπία σε Δύο Διαστάσεις

Σε μία δισδιάστατη κατασκευή υπάρχουν τρία είδη στηρίξεων ή συνδέσεων:

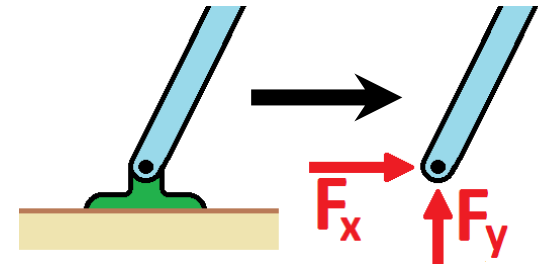
1. Αντιδράσεις ισοδύναμες με μία δύναμη γνωστής διεύθυνσης.

- Κυλίσεις, καλώδια, επιφάνειες χωρίς τριβή.
- Εμποδίζουν την κίνηση σε μία διεύθυνση.
- Οι αντιδράσεις περιλαμβάνουν έναν άγνωστο.



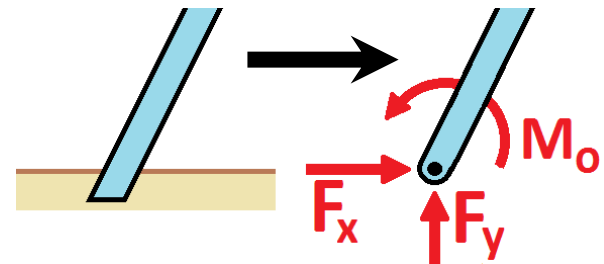
2. Αντιδράσεις ισοδύναμες με μία δύναμη άγνωστης διεύθυνσης (ή δύο άγνωστες αντιδράσεις κάθετες μεταξύ τους).

- Αρθρώσεις, επιφάνειες με τριβή.
- Εμποδίζουν την κίνηση αλλά όχι την περιστροφή.
- Οι αντιδράσεις περιλαμβάνουν δύο αγνώστους.



3. Αντιδράσεις ισοδύναμες με μία δύναμη άγνωστης διεύθυνσης (ή δύο άγνωστες αντιδράσεις κάθετες μεταξύ τους) και μία ροπή.

- Πακτώσεις, πλήρης περιορισμός κινήσεων.
- Εμποδίζουν την κίνηση αλλά και την περιστροφή.
- Οι αντιδράσεις περιλαμβάνουν τρεις αγνώστους.



Ισορροπία σε Δύο Διαστάσεις

Στην περίπτωση δύο διαστάσεων, οι συνθήκες ισορροπίας απλοποιούνται αρκετά. Έτσι οι έξι **Στερεοστατικές Εξισώσεις Ισορροπίας** ανάγονται σε τρεις εξισώσεις.

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma M_A = 0$$

όπου το A είναι οποιοδήποτε σημείο στο επίπεδο της κατασκευής.

- Αυτές οι τρεις εξισώσεις δεν μπορούν να λυθούν για περισσότερο από τρεις αγνώστους.
- Οι άγνωστες δυνάμεις περιλαμβάνουν αντιδράσεις και ο αριθμός των αγνώστων εξαρτάται από το είδος της στήριξης ή της σύνδεσης που προκαλεί αυτή την αντίδραση.
- Οι τρεις εξισώσεις ισορροπίας δεν μπορούν να αυξηθούν, αλλά μπορούν να αντικατασταθούν με άλλες για λόγους διευκόλυνσης. Για παράδειγμα:

$$\Sigma F_x = 0$$

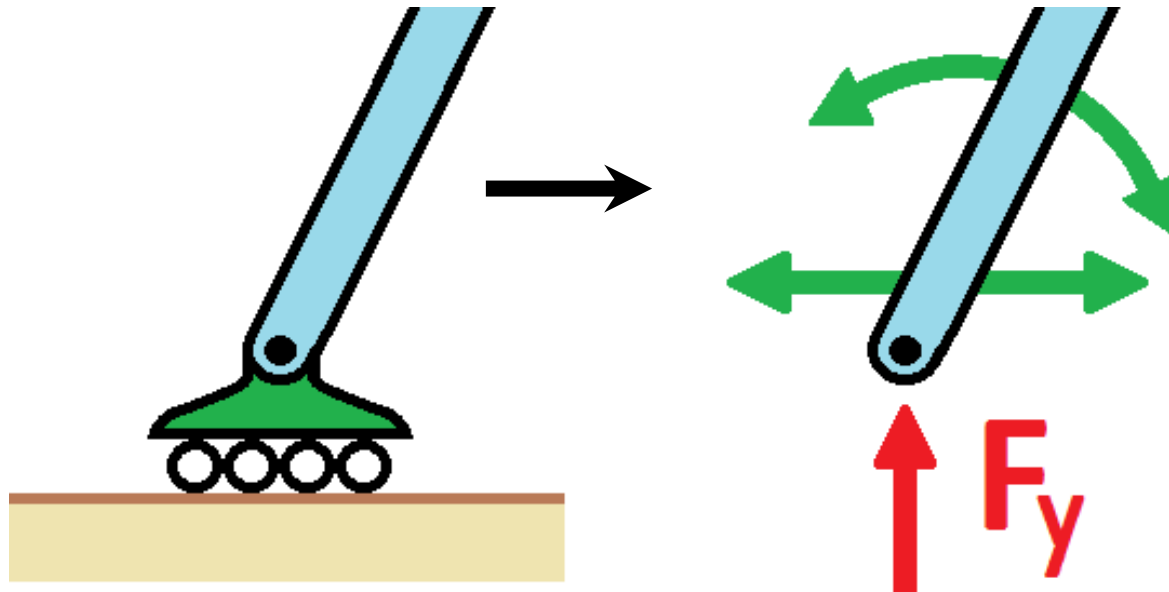
$$\Sigma M_A = 0$$

$$\Sigma M_B = 0$$

Ισορροπία σε Δύο Διαστάσεις

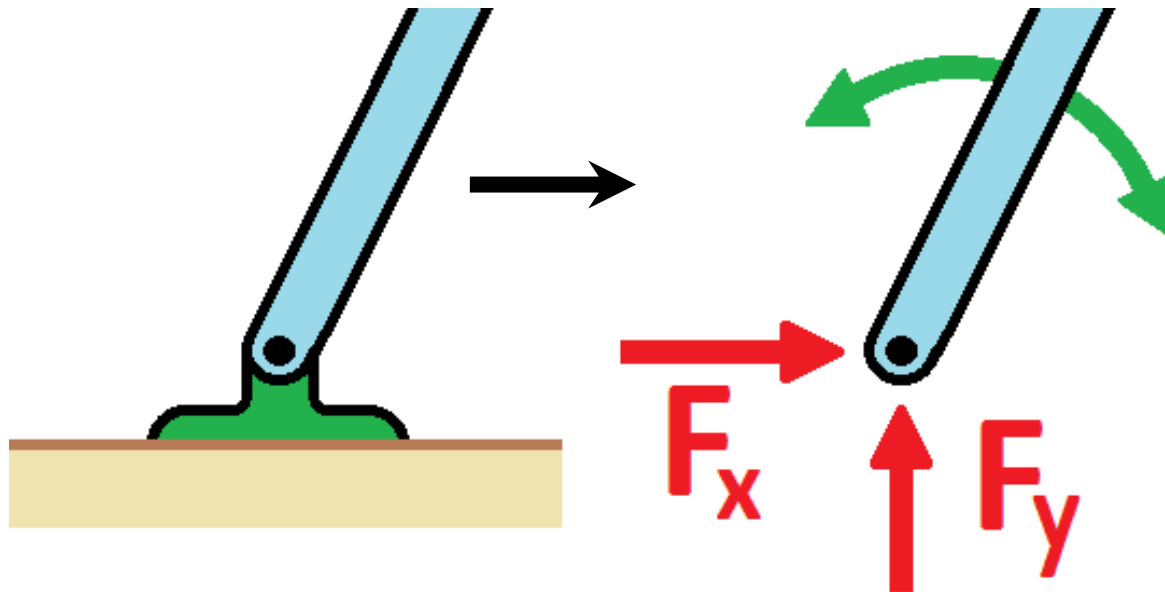
1. Αντιδράσεις ισοδύναμες με μία δύναμη γνωστής διεύθυνσης.

- Κυλίσεις, καλώδια, επιφάνειες χωρίς τριβή.
- Εμποδίζουν την κίνηση σε **μία και μόνο διεύθυνση** κατά την οποία αναπτύσσεται η παραγόμενη αντίδραση.
- Οι αντιδράσεις περιλαμβάνουν έναν άγνωστο.



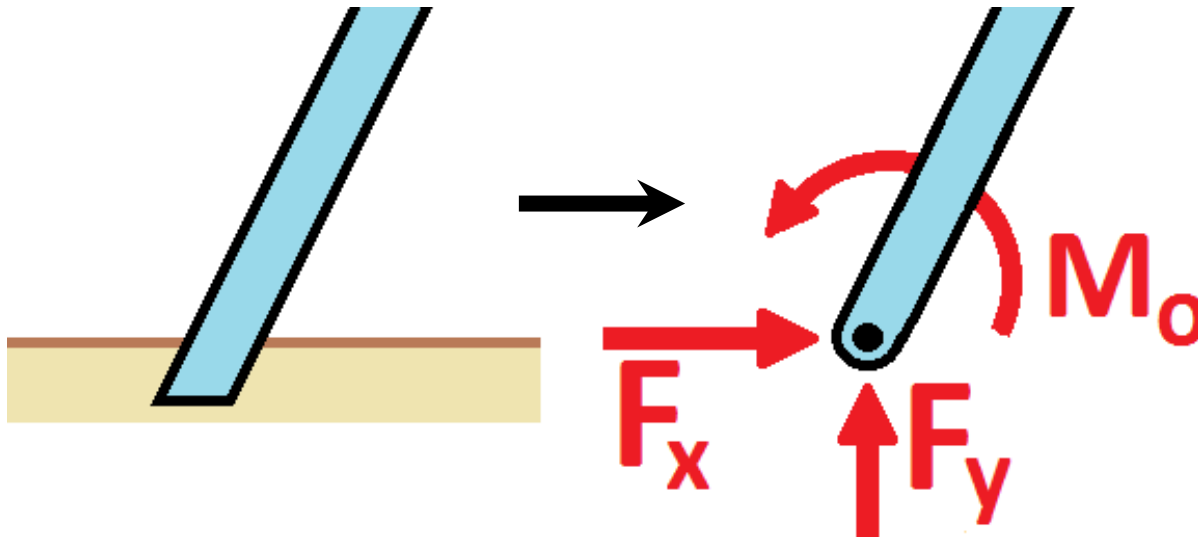
Ισορροπία σε Δύο Διαστάσεις

2. Αντιδράσεις ισοδύναμες με μία δύναμη άγνωστης διεύθυνσης (ή δύο άγνωστες αντιδράσεις κάθετες μεταξύ τους).
- Αρθρώσεις, επιφάνειες με τριβή.
 - Εμποδίζουν την κίνηση στις δύο διευθύνσεις x και y αλλά όχι την περιστροφή.
 - Οι αντιδράσεις περιλαμβάνουν δύο αγνώστους.



Ισορροπία σε Δύο Διαστάσεις

3. Αντιδράσεις ισοδύναμες με μία δύναμη άγνωστης διεύθυνσης (ή δύο άγνωστες αντιδράσεις κάθετες μεταξύ τους) και μία ροπή.
- Πακτώσεις, πλήρης περιορισμός κινήσεων.
 - Εμποδίζουν την κίνηση αλλά και την περιστροφή.
 - Οι αντιδράσεις περιλαμβάνουν τρεις αγνώστους.

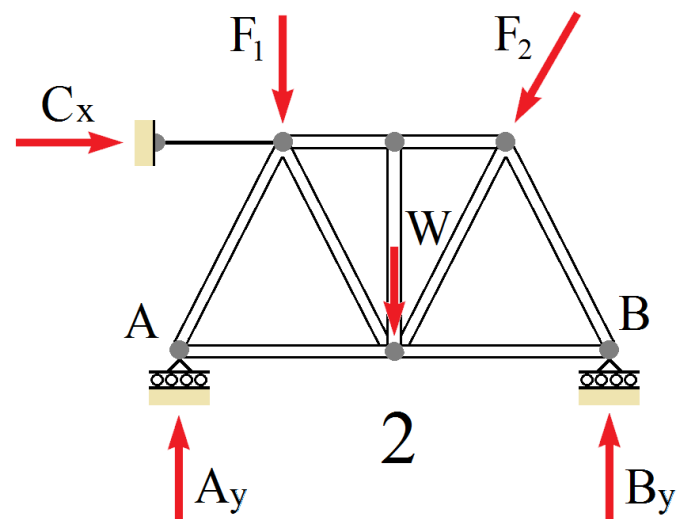
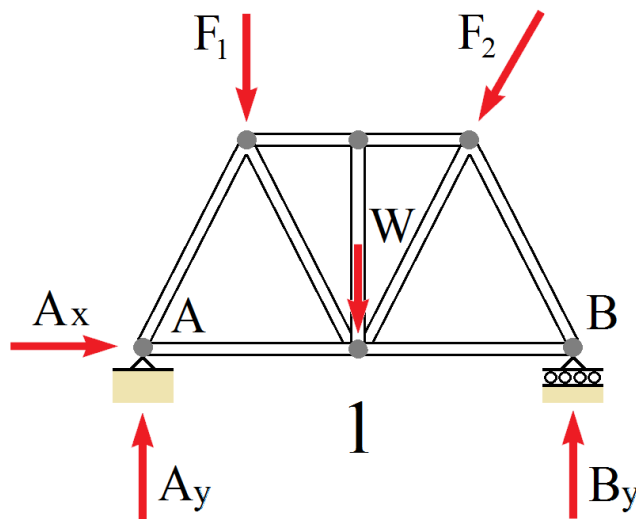


Όταν η φορά μίας δύναμης ή μίας ροπής δεν είναι προφανής, τότε την υποθέτουμε τυχαία, οπότε από το πρόσημο συμπεραίνουμε αν η υπόθεση ήταν σωστή.

Ισορροπία σε Δύο Διαστάσεις

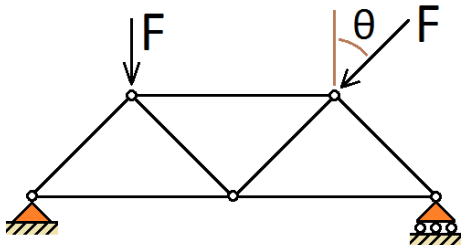
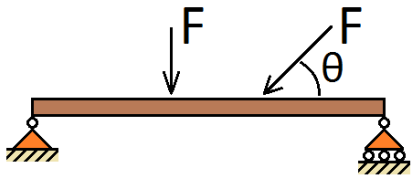
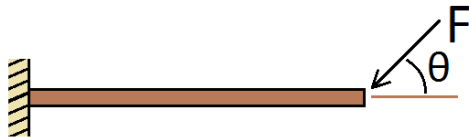
Οι τρεις **Στερεοστατικές Εξισώσεις Ισορροπίας** επιτρέπουν τον υπολογισμό τριών το πολύ αγνώστων, που μπορεί να είναι:

- Οι δυνάμεις αντίδρασης τριών ράβδων ή τριών καλωδίων.
- Οι δυνάμεις αντίδρασης δύο κυλίσεων και μίας ράβδου (Σχήμα 2).
- Οι δυνάμεις αντίδρασης μίας άρθρωσης και μίας ράβδου.
- Οι δυνάμεις αντίδρασης μίας άρθρωσης και μίας κύλισης (Σχήμα 1).
- Οι δυνάμεις αντίδρασης και η ροπή μίας πάκτωσης.



Είδη Φορέων

Φορέας ονομάζεται γενικά κάθε σώμα ή κατασκευή που μπορεί με ασφάλεια να μεταφέρει εξωτερικά φορτία, τα οποία μεταφέρει στις στηρίξεις του.



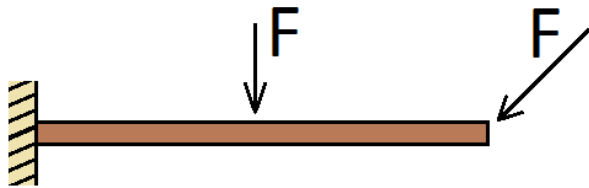
Ράβδος: Σώμα με μήκος πολύ μεγαλύτερο από τις άλλες του διαστάσεις. Μπορεί να εφελκύεται ή να θλίβεται.

Δοκός: Σώμα με μήκος πολύ μεγαλύτερο από τις άλλες του διαστάσεις. Καταπονείται από αξονικά και από εγκάρσια φορτία. Διακρίνονται σε αμφιέρειστες, προβόλους κλπ.

Δικτύωμα: Φορέας που αποτελείται από ράβδους κατάλληλα ενωμένες μεταξύ τους μέσω αρθρώσεων. Φορτίζεται από δυνάμεις που πρέπει να εφαρμόζονται στους κόμβους.

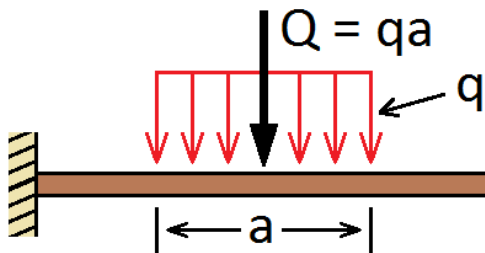
Είδη Φορτίων

Τα φορτία που μπορεί να επιβληθούν στα διάφορα σώματα διακρίνονται στα **συγκεντρωμένα** και τα **κατανεμημένα** φορτία.



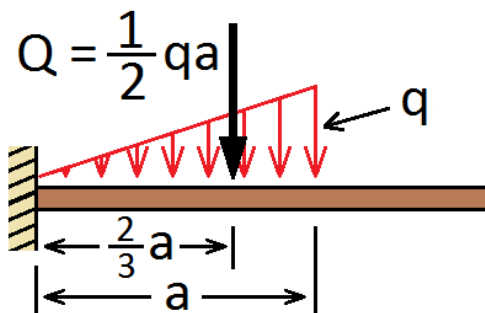
Συγκεντρωμένο ή σημειακό φορτίο: Το φορτίο εκείνο του οποίου η δράση περιορίζεται σε ένα μόνο σημείο.

Στην πραγματικότητα ασκείται σε πολύ μικρή επιφάνεια και δεχόμαστε την παραδοχή απόλυτα συγκεντρωμένης δύναμης.



Κατανεμημένο φορτίο: Το φορτίο εκείνο του οποίου η δράση εκτείνεται σε ολόκληρο το σώμα ή σε ορισμένο τμήμα του.

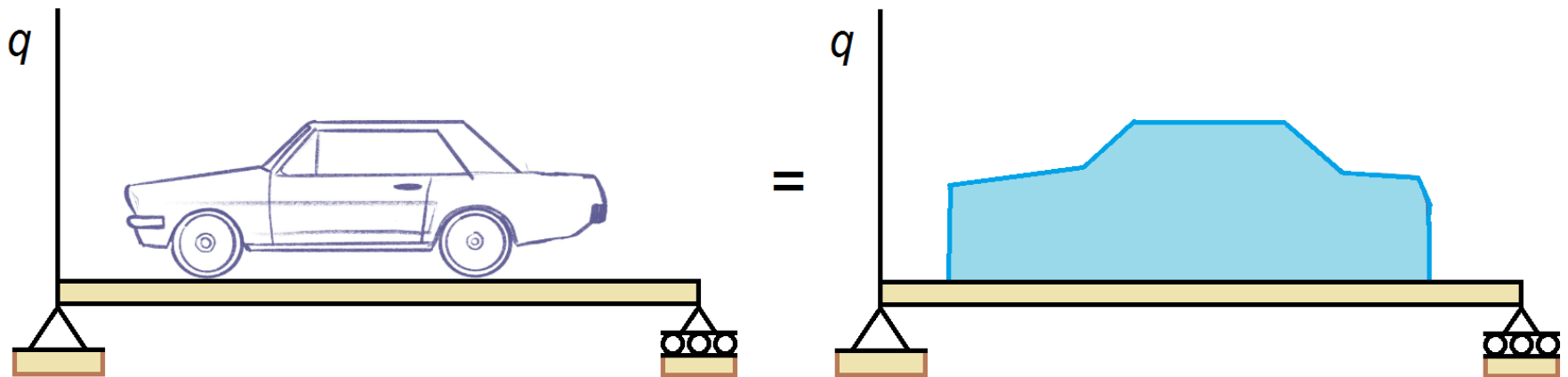
Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης **Q** ενός κατανεμημένου φορτίου εκφράζεται από το **εμβαδόν** της επιφάνειας που εκφράζεται από τη γραφική του παράσταση.



Το σημείο εφαρμογής της **Q** συμπίπτει με το **κέντρο βάρους** της επιφάνειας.

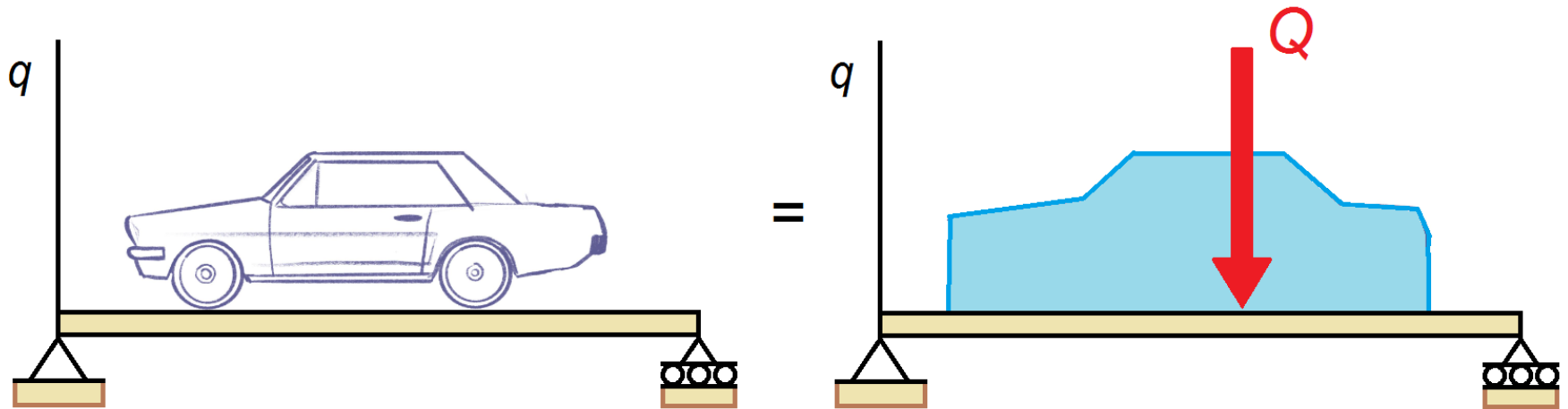
Κατανεμημένες φορτίσεις σε δοκούς

- **Κατανεμημένο φορτίο** (distributed load) είναι το φορτίο του οποίου η δράση εκτείνεται σε ολόκληρο το σώμα ή σε ορισμένο τμήμα του.
- Έστω μία δοκός που φέρει **κατανεμημένο φορτίο**.
- Το φορτίο αυτό μπορεί να οφείλεται στο βάρος των υλικών, στον άνεμο, σε υδροστατική πίεση κλπ.
- Μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά το κατανεμημένο φορτίο σχεδιάζοντας το φορτίο q ανά μονάδα μήκους, και εκφράζεται σε N/m.



Κατανεμημένες φορτίσεις σε δοκούς

- Μπορούμε να αντικαταστήσουμε το κατανεμημένο φορτίο πάνω σε μία δοκό με ένα συγκεντρωμένο (σημειακό) φορτίο Q , ώστε να παραγάγει τις ίδιες αντιδράσεις στις στηρίξεις.
- Το μέτρο του συγκεντρωμένου φορτίου Q είναι ίσο με το **εμβαδόν** της επιφάνειας που εκτείνεται κάτω από την καμπύλη του φορτίου.
- Το σημείο εφαρμογής του Q συμπίπτει με το **κέντρο βάρους** της επιφάνειας.

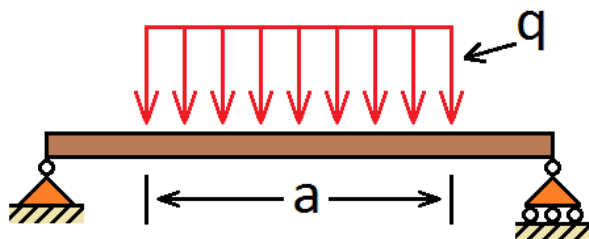


Κατανεμημένες φορτίσεις σε δοκούς

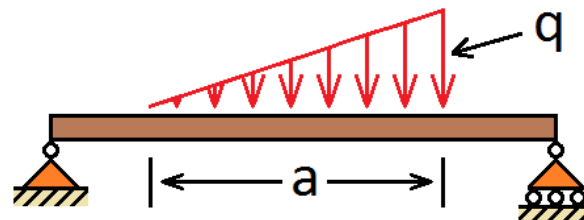
Ανάλογα με τη μορφή της φόρτισης q , διακρίνονται σε τρεις (3) διαφορετικές βασικές κατηγορίες:

- i. Ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση (ορθογωνική)
- ii. Τριγωνική φόρτιση
- iii. Τραπεζοειδής φόρτιση

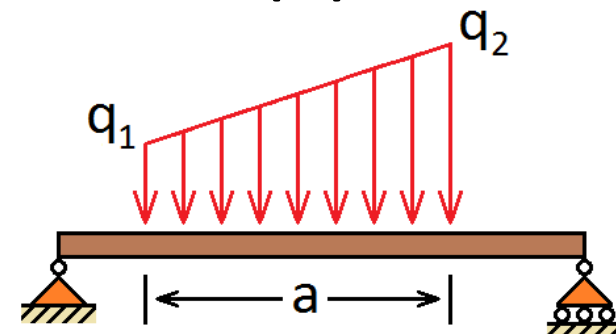
(i)



(ii)



(iii)



Κατανεμημένες φορτίσεις σε δοκούς

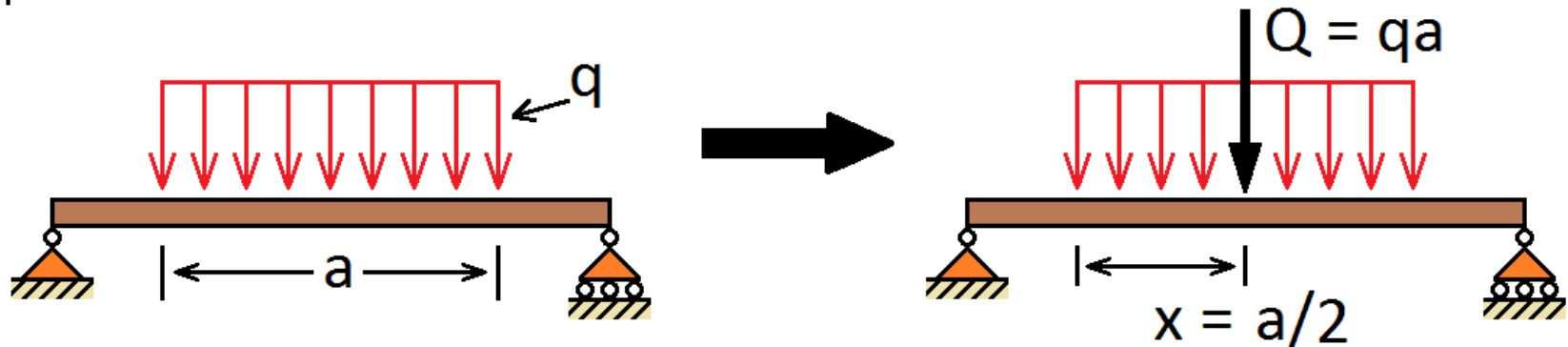
ι. Ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση (ορθογωνική)

Έχει σταθερή τιμή q , η γραφική της παράσταση είναι ευθεία παράλληλη με τη ράβδο, και ορίζεται σαν ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ύψους q και μήκους a .

Ονομάζεται ομοιόμορφο ή σταθερό κατανεμημένο φορτίο και είναι το πιο συχνό.

Η αντικατάσταση του ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου q γίνεται με ένα σημειακό φορτίο (δύναμη) Q του οποίου το μέτρο είναι ίσο με το εμβαδό του ορθογωνίου $Q = q \cdot a$.

Ο φορέας του Q διέρχεται από το κέντρο βάρους του ορθογωνίου, δηλαδή από το μέσο του a .



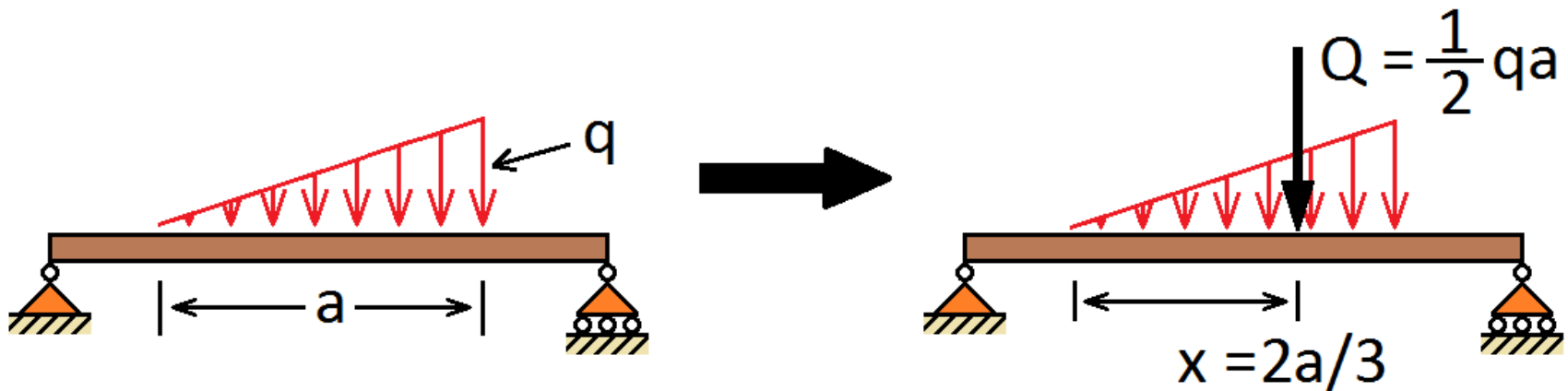
Κατανεμημένες φορτίσεις σε δοκούς

ii. Τριγωνική φόρτιση

Χαρακτηρίζεται από τη μέγιστη τιμή του q ή q_0 , η οποία παρουσιάζεται στο άκρο που έχει μη μηδενική τιμή, και από το μήκος a στο οποίο επενεργεί.

Η αντικατάστασή του γίνεται με ένα σημειακό φορτίο (δύναμη) Q του οποίου το μέτρο είναι ίσο με το εμβαδό του τριγώνου $Q = q \cdot a / 2$.

Ο φορέας του φορτίου Q διέρχεται από το κέντρο βάρους του τριγώνου, δηλαδή σε απόσταση $a/3$ από το άκρο μέγιστης τιμής ή απόσταση $2 \cdot a/3$ από το μηδενικό άκρο.



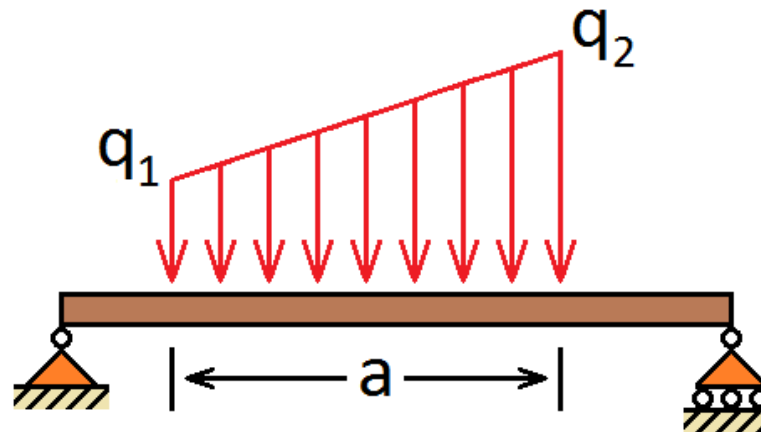
Κατανεμημένες φορτίσεις σε δοκούς

iii. Τραπεζοειδής φόρτιση

Χαρακτηρίζεται από τη δύο τιμές έντασης, μία ελάχιστη τιμή q_1 και μία μέγιστη τιμή q_2 στα δύο άκρα.

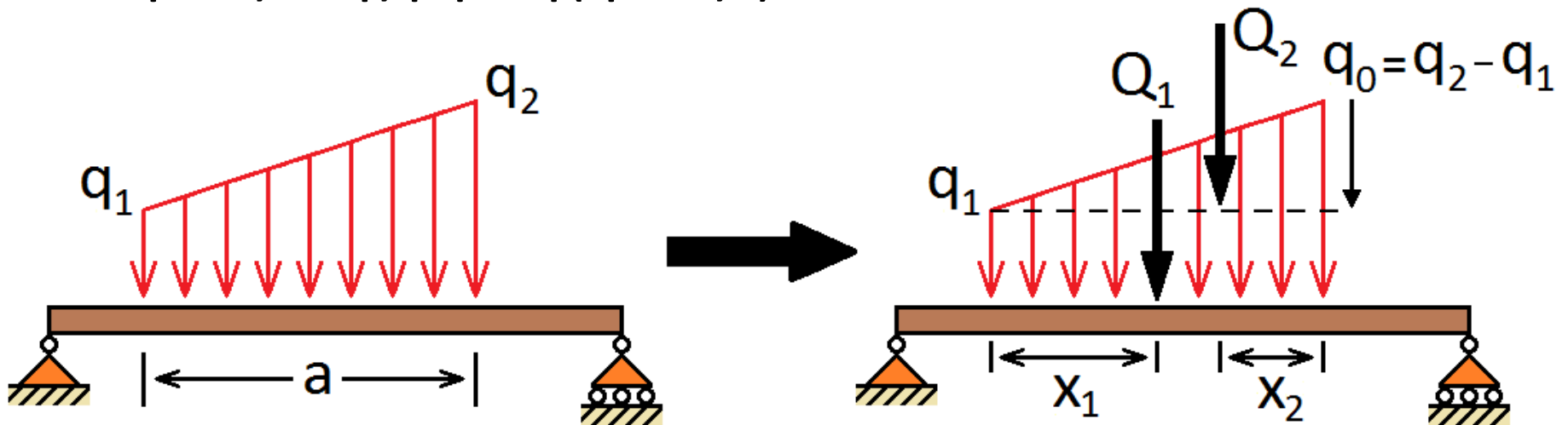
Η αντικατάστασή του με σημειακό φορτίο μπορεί να γίνει με δύο τρόπους.

- **Τρόπος 1.** Χωρίζοντας την τραπεζοειδή φόρτιση σε 2 φορτίσεις, μία ορθογωνική και μία τριγωνική.
- **Τρόπος 2.** Διατηρώντας την τραπεζοειδή φόρτιση και βρίσκοντας το εμβαδόν του τραπεζίου.



Κατανεμημένες φορτίσεις σε δοκούς

iii. Τραπεζοειδής φόρτιση (Τρόπος 1)



Από την τραπεζοειδή φόρτιση προκύπτουν δύο φορτίσεις, μία ορθογωνική με ομοιόμορφη τιμή q_1 και μία τριγωνική με μέγιστη τιμή $q_0 = q_2 - q_1$.

$$Q_1 = q_1 \cdot a$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} q_0 \cdot a$$

$$x_1 = \frac{a}{2}$$

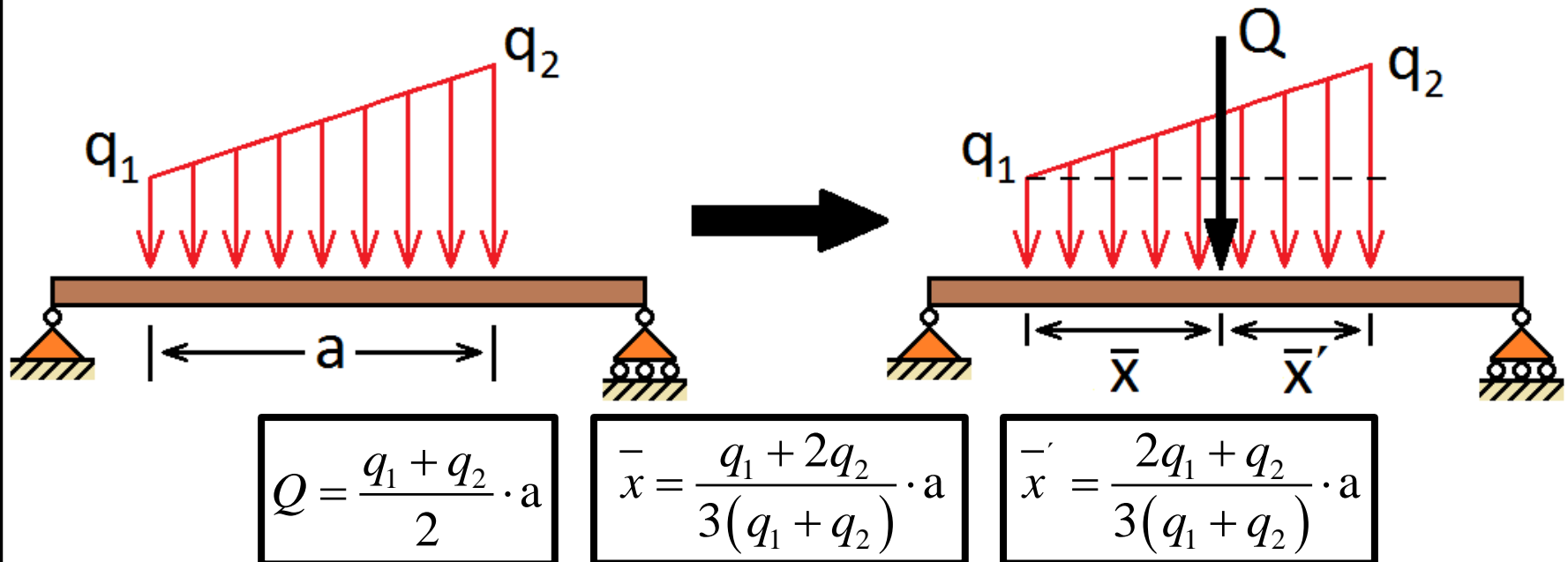
$$x_2 = \frac{a}{3}$$

Κατανεμημένες φορτίσεις σε δοκούς

iii. Τραπεζοειδής φόρτιση (Τρόπος 2)

Ένας δεύτερος τρόπος προσδιορισμού της τραπεζοειδούς φόρτισης είναι να υπολογίσουμε κατευθείαν το μέτρο της τραπεζοειδούς φόρτισης Q το οποίο είναι ίσο με το εμβαδόν του τραπέζιου.

Ο φορέας της φόρτισης Q διέρχεται από το κέντρο βάρους του τραπέζιου.



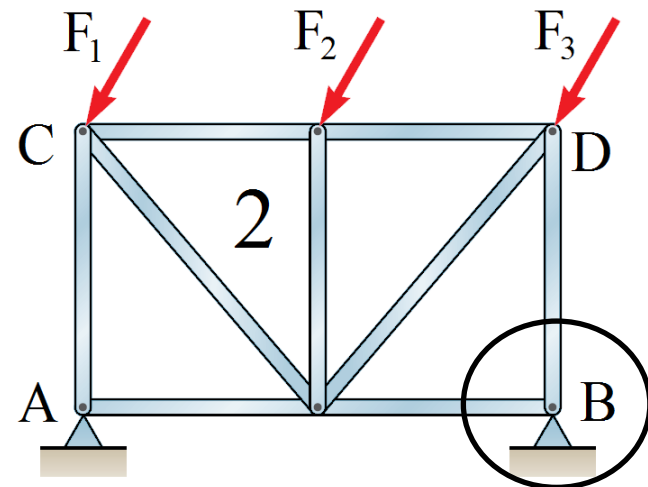
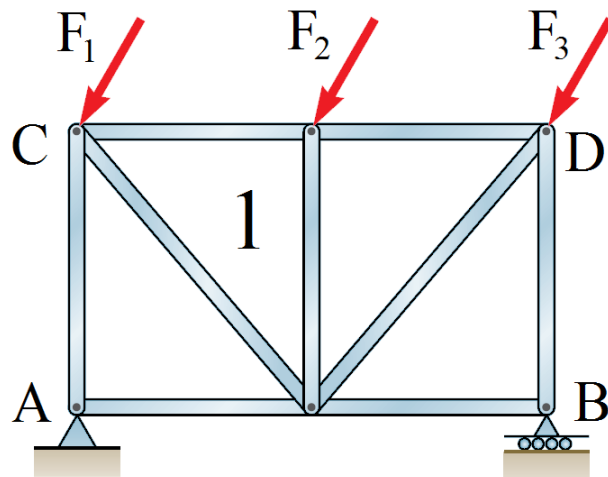
Υπερστατικές Αντιδράσεις

Όταν το στερεό σώμα δεν μπορεί να μετακινηθεί υπό την επίδραση δεδομένων ή άλλων φορτίσεων (Σχήμα 1), τότε λέμε ότι το στερεό σώμα **συγκρατείται** ή βρίσκεται σε **πλήρη καταστολή** ή **δεσμεύεται πλήρως** (completely constrained).

Στην περίπτωση αυτή οι αντιδράσεις περιλαμβάνουν **τρεις** αγνώστους που μπορούν να προσδιοριστούν από **τρεις** εξισώσεις ισορροπίας.

Στην κατάσταση αυτή οι αντιδράσεις είναι **στατικά ορισμένες**.

Αν για το ίδιο σώμα είχαμε άρθρωση στο σημείο B (Σχήμα 2), τότε οι στηρίξεις παρέχουν περισσότερους περιορισμούς από τους απολύτως αναγκαίους.

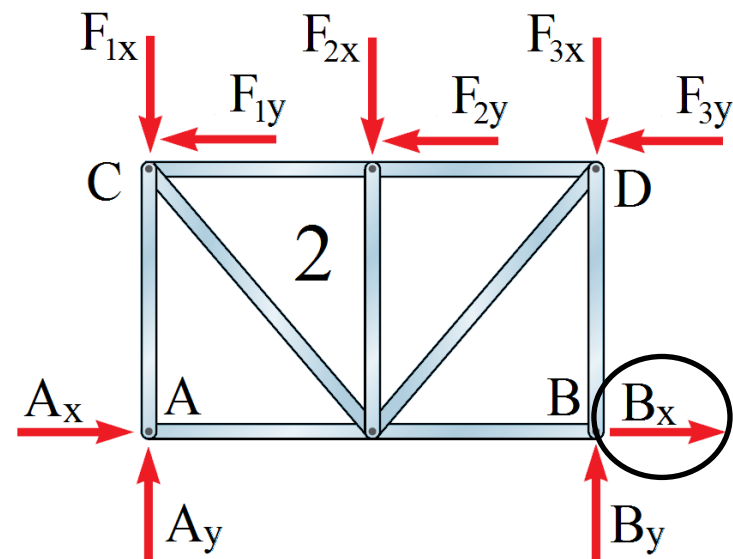
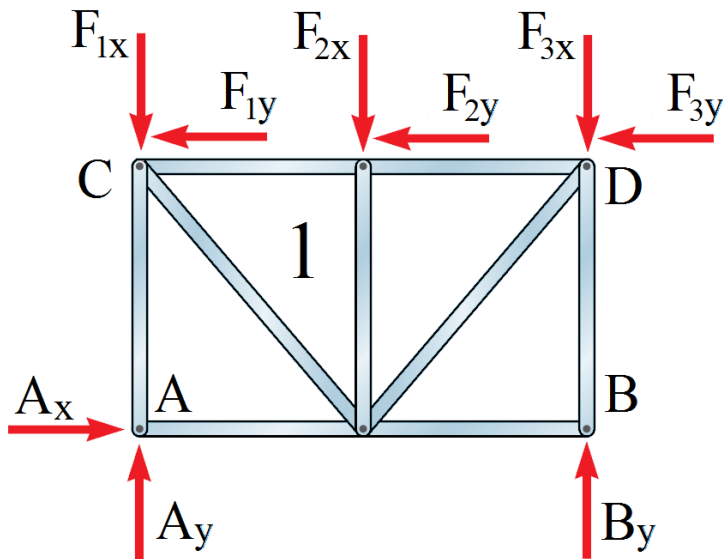


Υπερστατικές Αντιδράσεις

Από το ΔΕΣ βλέπουμε ότι οι αντιδράσεις στη δεύτερη περίπτωση περιλαμβάνουν τέσσερις αγνώστους. Οι εξισώσεις ισορροπίας όμως παραμένουν τρεις.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε περισσότερους αγνώστους από τις εξισώσεις, άρα δεν είναι δυνατός ο υπολογισμός όλων των αγνώντων.

Από τις $\Sigma M_A = 0$ και $\Sigma M_B = 0$ υπολογίζουμε τις B_y και A_y αντίστοιχα, ενώ από την $\Sigma F_x = 0$ υπολογίζουμε το άθροισμα $A_x + B_x$. Οι συνιστώσες A_x και B_x είναι **στατικά αόριστες**.

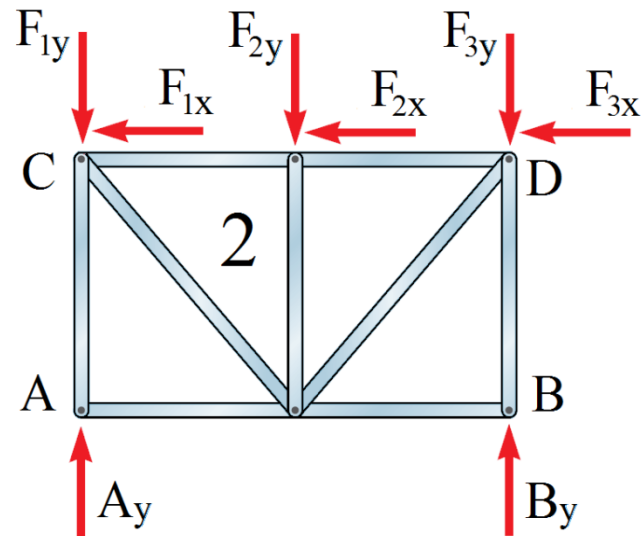
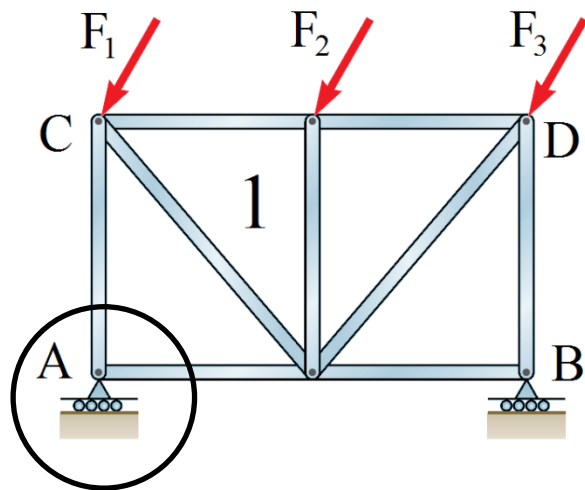


Υπερστατικές Αντιδράσεις

Αντιθέτως, όταν οι περιορισμοί από τις στηρίξεις δεν είναι επαρκείς για να αποτρέψουν την οριζόντια μετατόπιση (π.χ. κύλιση και στο σημείο A), τότε λέμε ότι το στερεό σώμα είναι **μερικώς δεσμευμένο** (partially constrained).

Οι άγνωστες αντιδράσεις είναι οι A_y και B_y όπως φαίνεται στο ΔΕΣ. Στην περίπτωση αυτή έχουμε λιγότερους αγνώστους από τις εξισώσεις, άρα μία εξίσωση δεν θα ικανοποιείται.

Οι εξισώσεις $\Sigma M_A = 0$ και $\Sigma M_B = 0$ μπορούν να ικανοποιηθούν αλλά η $\Sigma F_x = 0$ δεν θα ικανοποιηθεί, παρά μόνο αν το άθροισμα των οριζοντίων συνιστωσών είναι μηδενικό.



Τεχνική Μηχανική

Βιβλιογραφία

- Τεχνική Μηχανική - Στατική, Beer F, Johnston R, Mazurek D, 11^η έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλα, 2018.
- Στατική - Μηχανική του Απαραμόρφωτου Στερεού, Π. Βουθούνης, 6^η έκδοση, Εκδόσεις Α. Βουθούνη, 2017.
- Στατική και Αντοχή Υλικών, Α. Πολυζάκης, 2017.