Σημειώσεις διαλέξεων «Τεχνική Μηχανική»

Διάλεξη 2
28/02/2023

Λευθεριώτης Γεώργιος
Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Πατρών

Ισορροπία Σωματιδίου

Όταν η συνισταμένη όλων των δυνάμεων που δρουν σε ένα σώμα είναι **μηδενική**, τότε το σώμα βρίσκεται σε **ισορροπία**.

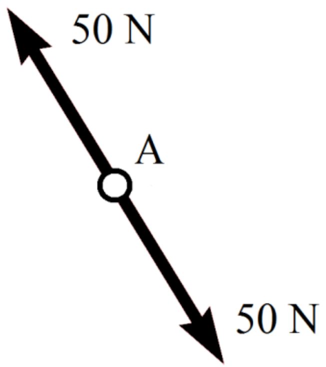
Ισορροπία Σωματιδίου ⟶ $\boxed{R = \Sigma F = 0}$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow \Sigma\left(F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}\right) = 0 \Rightarrow \left(\Sigma F_x\right)\mathbf{i} + \left(\Sigma F_y\right)\mathbf{j} = 0$$

Άρα οι συνθήκες για την ισορροπία ενός σώματος είναι:

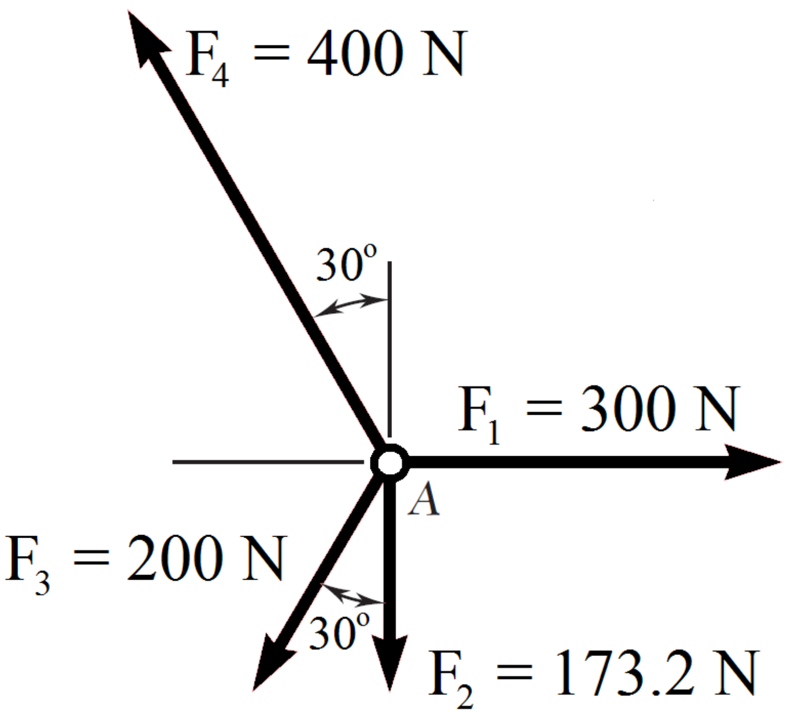
$$\boxed{\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0}$$

Όταν σε ένα σώμα δρουν δύο δυνάμεις με το ίδιο μέτρο, την ίδια γραμμή ενέργειας αλλά αντίθετη φορά, τότε η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν και το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία.



Ισορροπία Σωματιδίου

Μία άλλη περίπτωση ισορροπίας ενός σώματος είναι όταν περισσότερες από δύο δυνάμεις ασκούνται σε ένα σώμα.



$$\Sigma F_x = F_1 - F_3 \sin 30 - F_4 \sin 30 \Rightarrow$$

$$\Sigma F_x = 300 - 200 \sin 30 - 400 \sin 30 \Rightarrow$$

$$\Sigma F_x = 300 - 100 - 200 \Rightarrow \boxed{\Sigma F_x = 0}$$

$$\Sigma F_y = -F_2 - F_3 \cos 30 + F_4 \cos 30 \Rightarrow$$

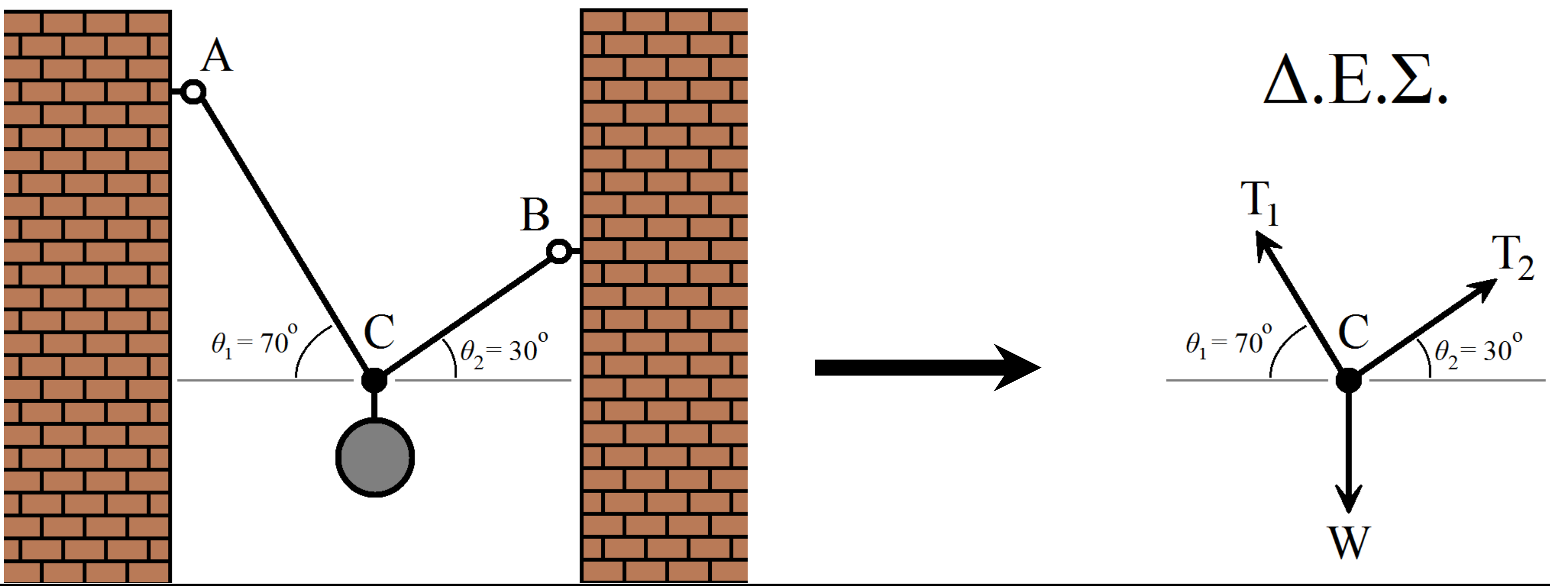
$$\Sigma F_y = -173{,}2 - 200 \cos 30 + 400 \cos 30 \Rightarrow$$

$$\Sigma F_y = -173{,}2 - 173{,}2 + 346{,}4 \Rightarrow \boxed{\Sigma F_y = 0}$$

Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος

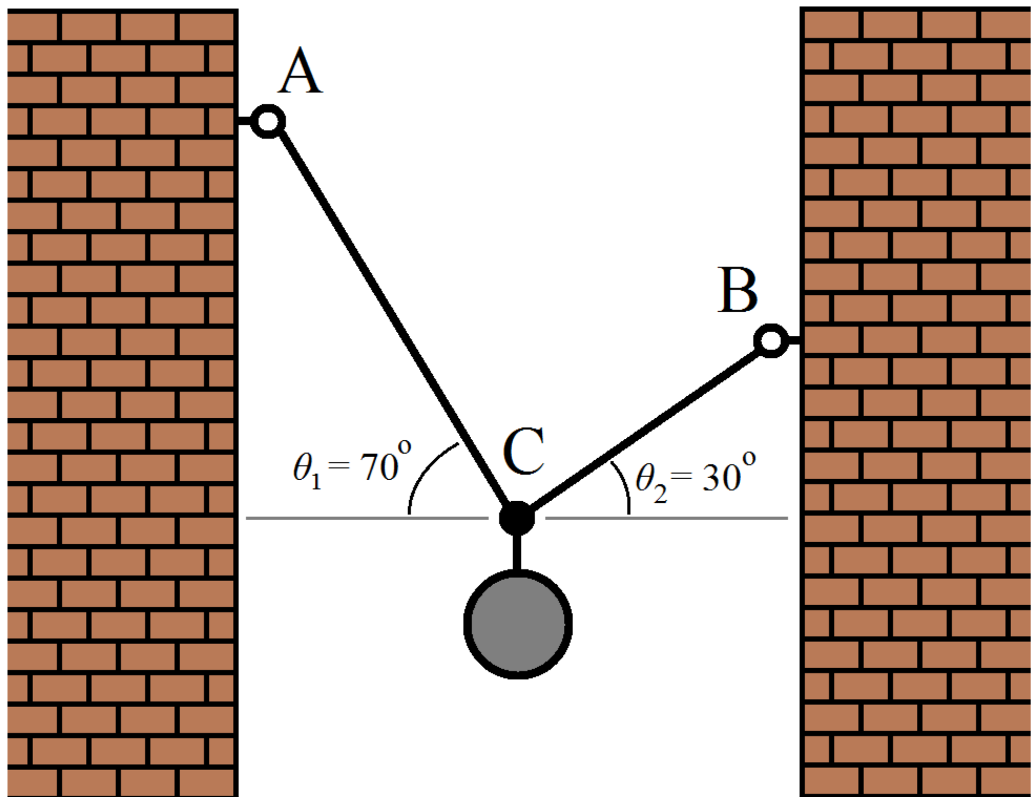
Σε ένα φυσικό σύστημα εκτός από τις δυνάμεις που επιβάλλονται σε ένα σώμα, υπάρχουν και άλλες δυνάμεις όπως το ίδιο βάρος των σωμάτων και οι αντιδράσεις άλλων σωμάτων.

Για να μελετηθεί σωστά η ισορροπία ενός υλικού σημείου πρέπει πρώτα να σχεδιάσουμε το **Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος (Δ.Ε.Σ.)** στο οποίο εμφανίζονται όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.



Εφαρμογή

Σώμα βάρους ***W* = 800 N** αναρτάται από κρίκο **C**, ο οποίος στηρίζεται από τα αβαρή καλώδια **AC** και **BC**. Να βρεθούν οι τάσεις των καλωδίων.

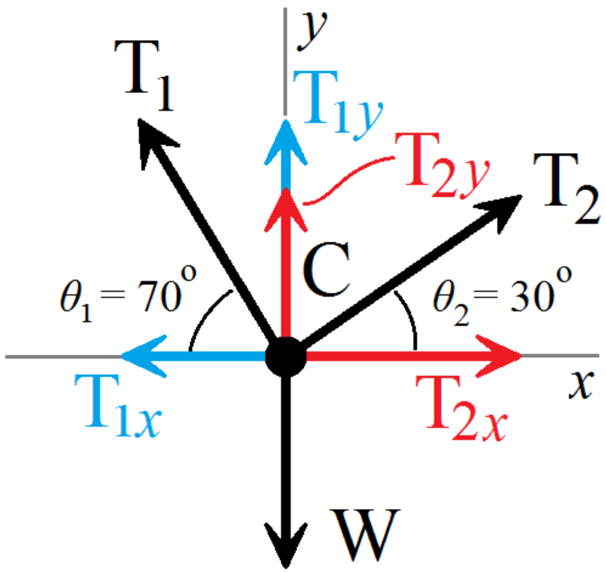


Εφαρμογή

Επίλυση

Αρχικά σχεδιάζουμε το Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος για το υλικό σημείο C και αναλύουμε τις δυνάμεις $\mathbf{T_1}$ και $\mathbf{T_2}$ σε συνιστώσες κατά *x* και *y*.

Δ.Ε.Σ.



Για να ισορροπεί το υλικό σημείο πρέπει να ισχύουν:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_{2x} - T_{1x} = 0 \Rightarrow T_2 \cos\theta_2 - T_1 \cos\theta_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 \cos 30 = T_1 \cos 70 \Rightarrow \boxed{T_1 = 2{,}532 \cdot T_2} \quad \textbf{(1)}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{1y} + T_{2y} - W = 0 \Rightarrow T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 = W \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{0{,}939 \cdot T_1 + 0{,}5 \cdot T_2 = 800} \quad \textbf{(2)}$$

Επιλύοντας το σύστημα των **(1)** και **(2)** έχουμε:

$$\boxed{T_1 = 703{,}9\ N} \qquad \boxed{T_2 = 278\ N}$$

Άθροισμα Δυνάμεων στο Χώρο

Έστω η δύναμη ***F*** που ασκείται στο σημείο **O**.

Η δύναμη ***F*** αναλύεται σε 3 ορθογώνιες διανυσματικές συνιστώσες $\boldsymbol{F_x}$, $\boldsymbol{F_y}$, $\boldsymbol{F_z}$

Οι τρεις γωνίες $\boldsymbol{\theta_x}$, $\boldsymbol{\theta_y}$, $\boldsymbol{\theta_z}$ ορίζουν την κατεύθυνση της δύναμης στο χώρο.

Η σχέση που ορίζει το μέτρο της δύναμης ***F*** είναι η:

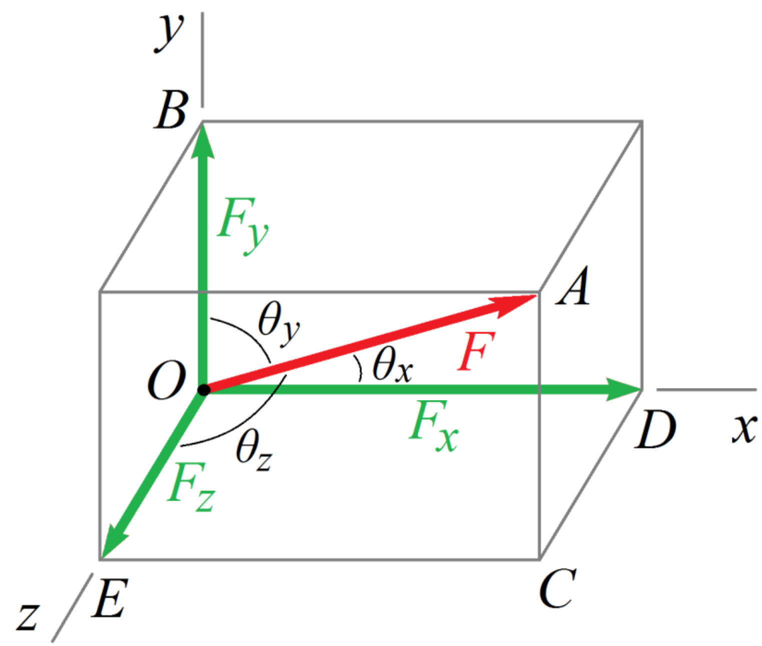
$$\boxed{F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$$

όπου οι μονομετρικές συνιστώσες της ***F***

$$\boxed{F_x = F\cos\theta_x \qquad F_y = F\cos\theta_y \qquad F_z = F\cos\theta_z}$$

Διανυσματική έκφραση της δύναμης ***F***

$$\boxed{F = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}}$$



Εφαρμογή

Μία δύναμη μεγέθους **400 N** σχηματίζει γωνίες 60°, 45° και 130° με τους άξονες *x*, *y* και *z*. Να βρείτε τις συνιστώσες της δύναμης και να εκφράσετε τη δύναμη σε μορφή μοναδιαίων διανυσμάτων.

Λύση

Οι μονομετρικές συνιστώσες της ***F*** υπολογίζονται από τους τύπους:

$$\boxed{F_x = F\cos\theta_x \qquad F_y = F\cos\theta_y \qquad F_z = F\cos\theta_z}$$

Άρα έχουμε:

$$F_x = 400\cdot\cos 60 \Rightarrow F_x = 200N$$

$$F_y = 400\cdot\cos 45 \Rightarrow F_y = 282{,}84N$$

$$F_z = 400\cdot\cos 130 \Rightarrow F_z = -257{,}11N$$

Σε μορφή μοναδιαίων διανυσμάτων : $\boxed{F = \left(200N\right)\mathbf{i} + \left(282{,}84N\right)\mathbf{j} - \left(257{,}11N\right)\mathbf{k}}$

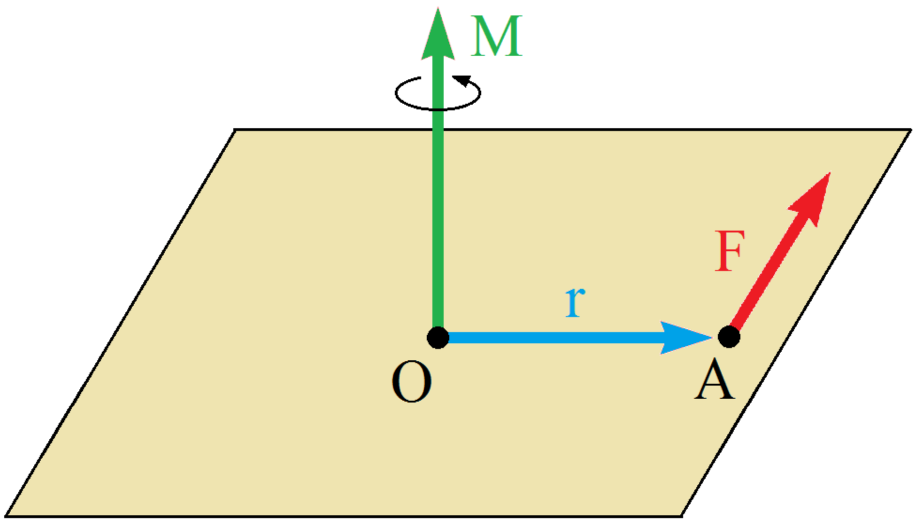
Ροπή Δύναμης ως προς Σημείο

Έστω δύναμη **F** η οποία ασκείται σε ένα στερεό σώμα στο σημείο **A**. Η απόσταση του σημείου **A** από ένα σταθερό σημείο αναφοράς **O** μπορεί να εκφραστεί με το διάνυσμα **r** (διάνυσμα θέσης).

Ορίζουμε ως ροπή της δύναμης **F** ως προς το σημείο **O** το διανυσματικό γινόμενο των **r** και **F**.

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}}$$

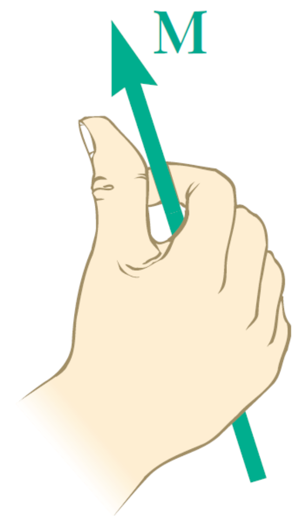
Μονάδες Ροπής: $(N \cdot m)$



<u>Ορισμός</u>: Η ροπή παριστάνει την τάση την οποία έχει ένα στερεό σώμα να **περιστραφεί** γύρω από σταθερό σημείο **O** υπό την επίδραση δύναμης **F**.

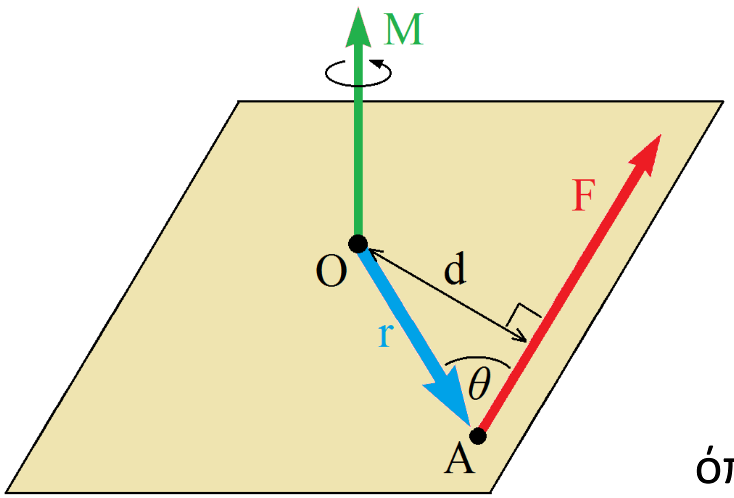
Ροπή Δύναμης ως προς Σημείο

Η ροπή **M** πρέπει να είναι κάθετη στο επίπεδο που περιέχει το σημείο **O** και τη δύναμη **F**.



Beer & Johnston, Vector Mechanics for Engineers Statics 9th Edition

- Έχει φορά σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού.
- Τα δάχτυλα στρέφονται κατά τη φορά περιστροφής την όποια θα μετέδιδε η δύναμη **F** στο σώμα.
- Ο αντίχειρας δείχνει τη φορά της ροπής.



Αν **θ** η γωνία μεταξύ του διανύσματος θέσης **r** και της δύναμης **F**, τότε:

$$M = rF\sin\theta = Fd$$

όπου **d** η κάθετη απόσταση μεταξύ του **O** και της **F**.

Θεώρημα Varignon ή θεώρημα ροπών

Η ροπή δύναμης ως προς σημείο είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των συνιστωσών της ως προς το συγκεκριμένο σημείο.

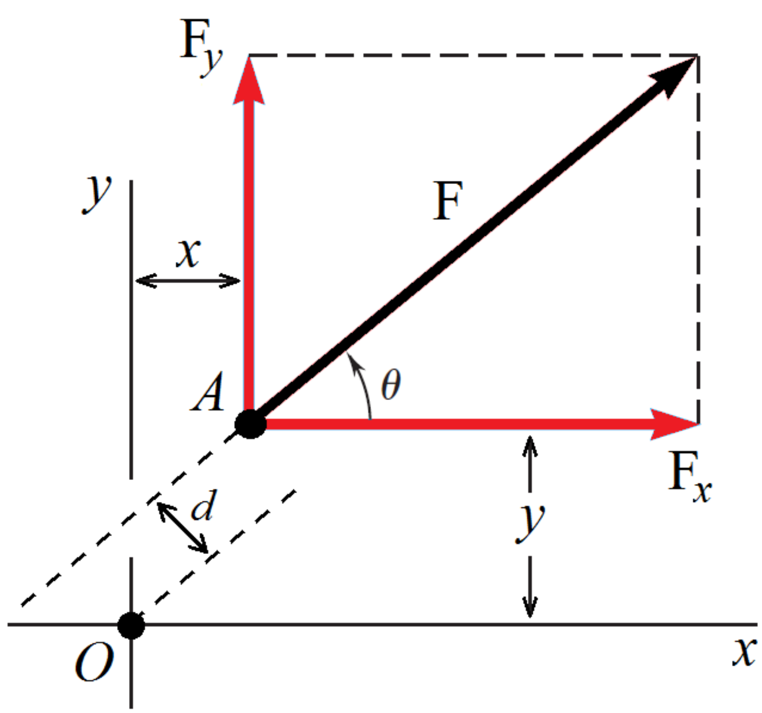
Αν δεν γνωρίζουμε την απόσταση ***d***, αλλά γνωρίζουμε τις συντεταγμένες του σημείου **Α**, τότε με βάση το θεώρημα θα ισχύει ότι:

$$\boxed{M_o = Fd = F_x y - F_y x}$$

Αν έχουμε πολλές τυχαίες δυνάμεις $\boldsymbol{F_i}$ για τις οποίες γνωρίζουμε τα μέτρα τους και τις γωνίες που σχηματίζουν με τον άξονα *x*.

Μεταφέροντας όλες τις $\boldsymbol{F_i}$ στο ***O***, προκύπτουν οι $\boldsymbol{F_{ix}}$, $\boldsymbol{F_{iy}}$ και οι ροπές $\boldsymbol{M_i}$ όπου ισχύει ότι:

$$\boxed{M_i = F_{ix} y_i - F_{iy} x_i}$$



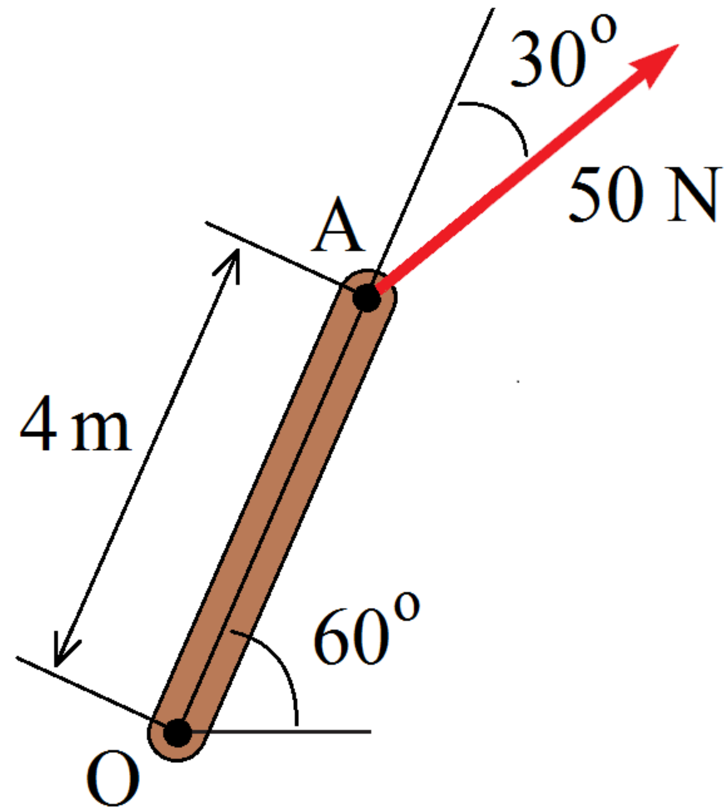
Εφαρμογή

Μία δύναμη με μέτρο **50 N** ασκείται στο άκρο **A** ενός μοχλού μήκους 4 m. Να προσδιορίσετε τη ροπή της δύναμης ως προς το σημείο **O**.

Λύση

Δεν γνωρίζουμε τη κάθετη απόσταση της γραμμής ενέργειας της δύναμης με το σημείο **O**.

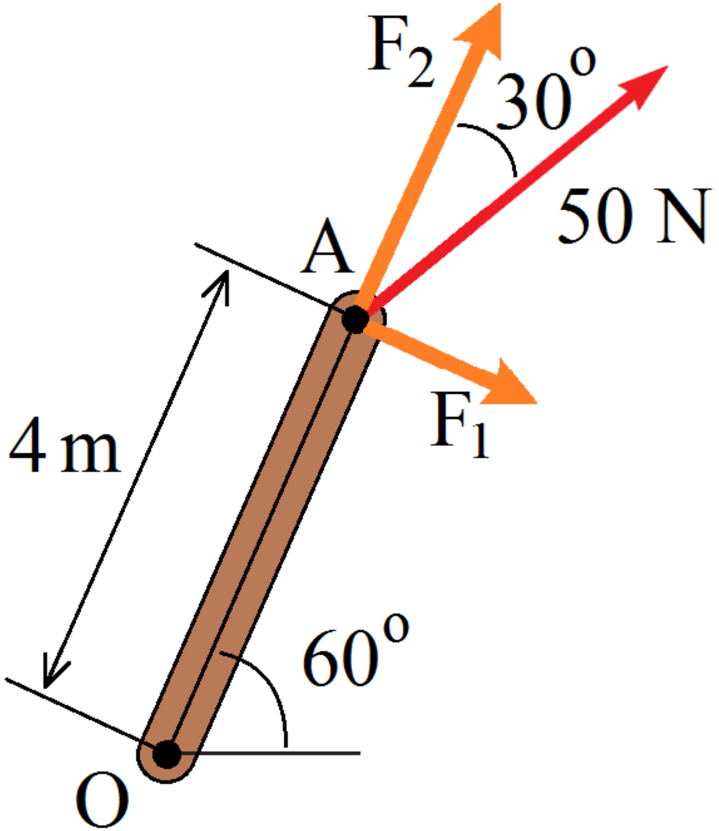
Αναλύουμε τη δύναμη σε δύο συνιστώσες F_1 και F_2 κάθετα και παράλληλα με τον άξονα του βραχίονα.



Λύση

Το σημείο **O** βρίσκεται στη γραμμή ενέργειας της συνιστώσας $\boldsymbol{F_2}$. Άρα η ροπή της $\boldsymbol{F_2}$ ως προς το σημείο **O** είναι μηδέν.

Άρα η ροπή της αρχικής δύναμης των 50 N ανάγεται στη ροπή της $\boldsymbol{F_1}$ μόνο, η οποία έχει φορά των δεικτών του ρολογιού, άρα μπορεί να διατυπωθεί σαν ένα αρνητικό μέγεθος.



$$F_1 = 50 \cdot \sin 30 \Rightarrow \boxed{F_1 = 25N}$$

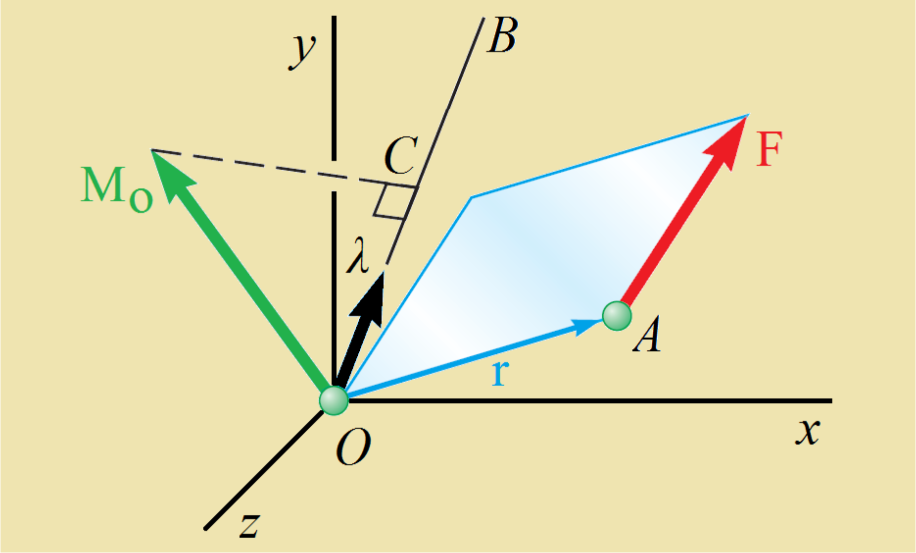
$$M_o = -F_1 \cdot 4m \Rightarrow \boxed{M_o = -100\ N \cdot m}$$

Ροπή Δύναμης ως προς Άξονα

Έστω δύναμη **F** η οποία ασκείται σε ένα στερεό σώμα στο σημείο **A**. Και $\mathbf{M_o}$ η ροπή της δύναμης αυτής ως προς το σημείο **O**. Έστω ότι **OB** είναι ένας άξονας που διέρχεται από το σημείο **B**.

Ορίζουμε τη ροπή $\mathbf{M_{OB}}$ της **F** ως προς τον άξονα **OB** την προβολή **OC** της ροπής $\mathbf{M_o}$ πάνω στον άξονα **OB**.

$$\boxed{M_{OB} = \lambda \cdot \mathrm{M_O} = \lambda \cdot (r \times F)}$$



Η ροπή $\mathbf{M_{OB}}$ της **F** ως προς τον άξονα **OB** μετρά την τάση της δύναμης **F** να μεταδώσει μία περιστροφική κίνηση ως προς το σταθερό άξονα **OB**.

Ροπή Δύναμης ως προς Άξονα

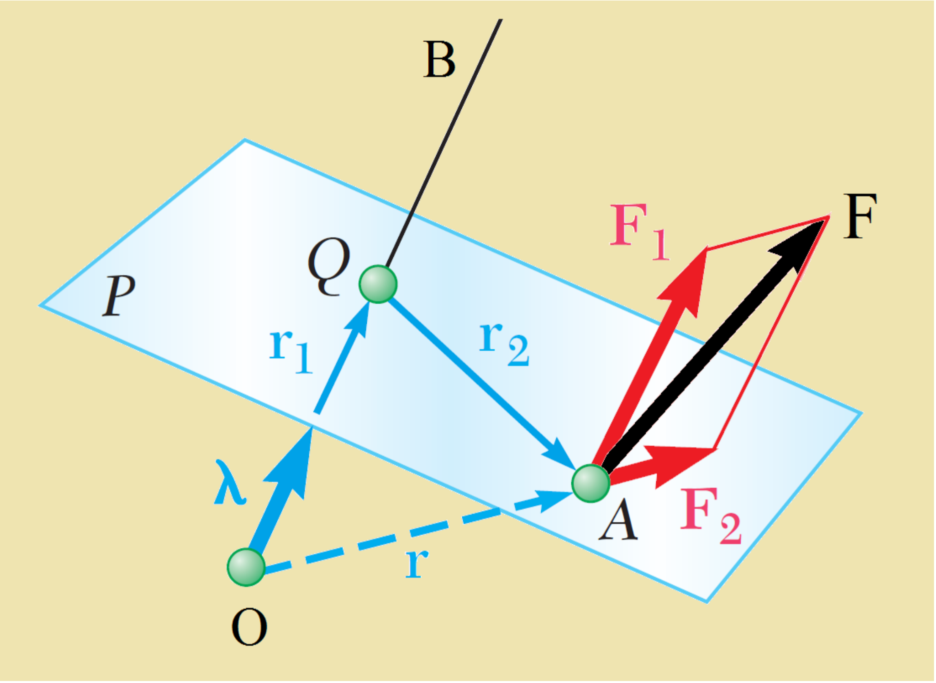
Για να αντιληφθούμε τη φυσική σημασία της ροπής $\mathbf{M_{OB}}$ ως προς τον άξονα **OB** ας αναλύσουμε τη δύναμη **F** στις συνιστώσες $\mathbf{F_1}$ και $\mathbf{F_2}$.

- Η $\mathbf{F_1}$ είναι παράλληλη με τον άξονα **OB**.
- Η $\mathbf{F_2}$ είναι κάθετη στην $\mathbf{F_1}$ και βρίσκεται στο επίπεδο που είναι κάθετο στον **OB**.

Η ροπή της $\mathbf{F_1}$ ως προς τον άξονα **OB** θα είναι μηδέν αφού η $\mathbf{F_1}$ είναι παράλληλη με τον άξονα **OB**.

Η ροπή της δύναμης **F** θα ισούται μόνο με τη ροπή της συνιστώσας $\mathbf{F_2}$ ως προς τον άξονα **OB**.

$$\boxed{M_{OB} = \lambda \cdot \left(r_2 \times F_2 \right)}$$



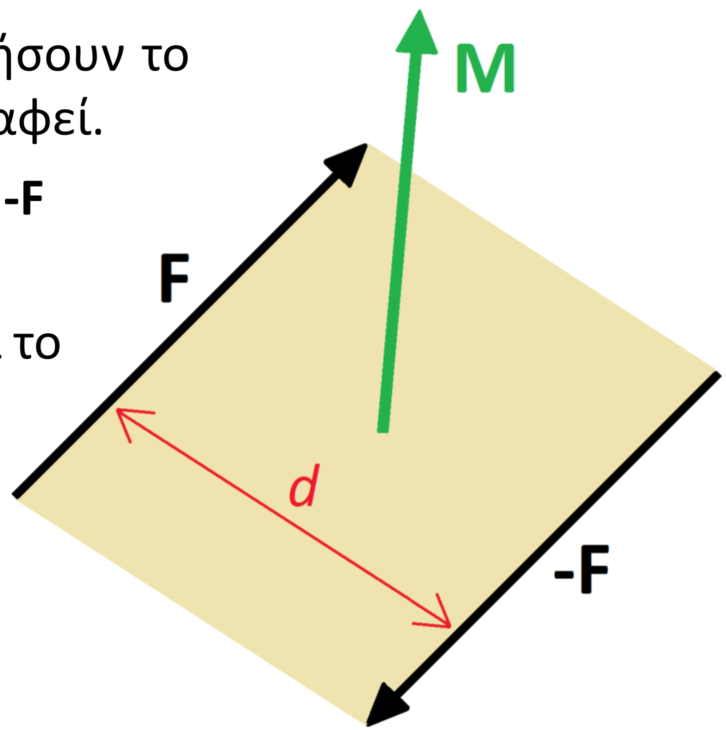
Ζεύγος Δυνάμεων

Το **ζεύγος δυνάμεων** είναι ένα σύστημα δύο δυνάμεων οι οποίες έχουν ίδιο μέτρο, ίδια διεύθυνση και αντίθετες φορές.

- Το άθροισμά των δυνάμεων σε οποιαδήποτε διεύθυνση είναι μηδενικό, αλλά το άθροισμα των ροπών τους ως προς ένα δεδομένο σημείο δεν είναι.
- Οι δυνάμεις αυτές δεν μπορούν να μετακινήσουν το σώμα αλλά τείνουν να το κάνουν να περιστραφεί.
- Το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων **F** και **-F** παριστάνεται από το διάνυσμα **M**.
- Το διάνυσμα **M** ονομάζεται ροπή ζεύγους και το μέτρο του είναι:

$$\boxed{M = F \cdot d}$$

όπου ***d*** είναι η κάθετη απόσταση ανάμεσα στις γραμμές ενέργειας των **F** και **-F**.



Ζεύγος Δυνάμεων

Κλασσικό παράδειγμα ενός ζεύγους δυνάμεων αποτελούν οι δυνάμεις ίσου μέτρου οι οποίες ασκούνται στο βραχίονα του σταυρού για τα μπουλόνια των ελαστικών των αυτοκινήτων.

Αρχική εικόνα από : https://www.123rf.com/photo_112676546_close-up-of-man-with-tyre-iron-changing-car-wheel.html

Ισορροπία Στερεών Σωμάτων

Όταν η συνισταμένη δύναμη και ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε ένα στερεό σώμα είναι μηδενικές, τότε το σώμα βρίσκεται σε **ισορροπία**.

$$\boxed{\Sigma F = 0} \qquad \boxed{\Sigma M_o = \Sigma\left(r \times F\right) = 0}$$

Από τις παραπάνω διανυσματικές εξισώσεις προκύπτουν 6 ισοδύναμες αλγεβρικές εξισώσεις ισορροπίας, που είναι γνωστές ως **Στερεοστατικές Εξισώσεις Ισορροπίας**.

$$\boxed{\Sigma F_x = 0} \quad \boxed{\Sigma F_y = 0} \quad \boxed{\Sigma F_z = 0} \qquad \textbf{(α)}$$

$$\boxed{\Sigma M_x = 0} \quad \boxed{\Sigma M_y = 0} \quad \boxed{\Sigma M_z = 0} \qquad \textbf{(β)}$$

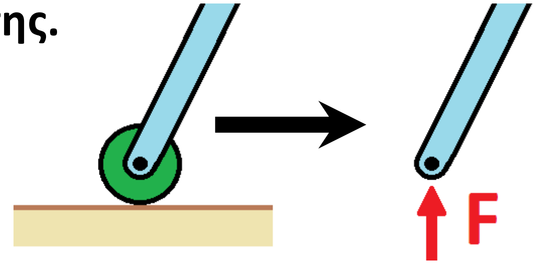
Οι εξισώσεις **(α)** εκφράζουν το γεγονός ότι οι συνιστώσες των εξωτερικών δυνάμεων ισορροπούν, οπότε το σώμα δεν θα μετακινηθεί.

Οι εξισώσεις **(β)** εκφράζουν το γεγονός ότι οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων ισορροπούν, οπότε το σώμα δεν θα περιστραφεί.

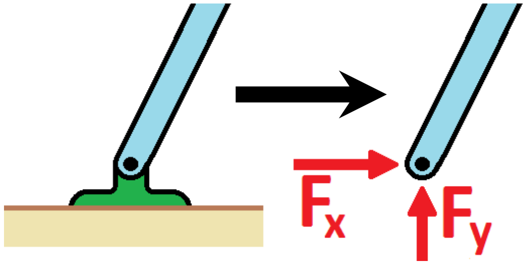
Ισορροπία σε Δύο Διαστάσεις

Σε μία δισδιάστατη κατασκευή υπάρχουν τρία είδη στηρίξεων ή συνδέσεων:

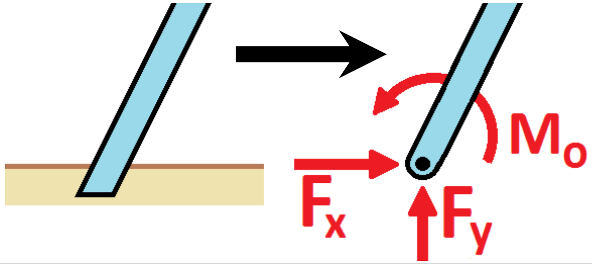
1. **Αντιδράσεις ισοδύναμες με μία δύναμη γνωστής διεύθυνσης.**
    - Κυλίσεις, καλώδια, επιφάνειες χωρίς τριβή.
    - Εμποδίζουν την κίνηση σε μία διεύθυνση.
    - Οι αντιδράσεις περιλαμβάνουν έναν άγνωστο.



2. **Αντιδράσεις ισοδύναμες με μία δύναμη άγνωστης διεύθυνσης (ή δύο άγνωστες αντιδράσεις κάθετες μεταξύ τους).**
    - Αρθρώσεις, επιφάνειες με τριβή.
    - Εμποδίζουν την κίνηση αλλά όχι την περιστροφή.
    - Οι αντιδράσεις περιλαμβάνουν δύο αγνώστους.



3. **Αντιδράσεις ισοδύναμες με μία δύναμη άγνωστης διεύθυνσης (ή δύο άγνωστες αντιδράσεις κάθετες μεταξύ τους) και μία ροπή.**
    - Πακτώσεις, πλήρης περιορισμός κινήσεων.
    - Εμποδίζουν την κίνηση αλλά και την περιστροφή.
    - Οι αντιδράσεις περιλαμβάνουν τρεις αγνώστους.



Ισορροπία σε Δύο Διαστάσεις

Στην περίπτωση δύο διαστάσεων, οι συνθήκες ισορροπίας απλοποιούνται αρκετά. Έτσι οι έξι **Στερεοστατικές Εξισώσεις Ισορροπίας** ανάγονται σε τρεις εξισώσεις.

$$\boxed{\Sigma F_x = 0} \quad \boxed{\Sigma F_y = 0} \quad \boxed{\Sigma M_A = 0}$$

όπου το Α είναι οποιοδήποτε σημείο στο επίπεδο της κατασκευής.

- Αυτές οι τρεις εξισώσεις δεν μπορούν να λυθούν για περισσότερο από τρεις αγνώστους.
- Οι άγνωστες δυνάμεις περιλαμβάνουν αντιδράσεις και ο αριθμός των αγνώστων εξαρτάται από το είδος της στήριξης ή της σύνδεσης που προκαλεί αυτή την αντίδραση.
- Οι τρεις εξισώσεις ισορροπίας δεν μπορούν να αυξηθούν, αλλά μπορούν να αντικατασταθούν με άλλες για λόγους διευκόλυνσης. Για παράδειγμα:

$$\boxed{\Sigma F_x = 0} \quad \boxed{\Sigma M_A = 0} \quad \boxed{\Sigma M_B = 0}$$

Τεχνική Μηχανική

Βιβλιογραφία

- Τεχνική Μηχανική - Στατική, Beer F, Johnston R, Mazurek D, 11η έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλα, 2018.
- Στατική - Μηχανική του Απαραμόρφωτου Στερεού, Π. Βουθούνης, 6η έκδοση, Εκδόσεις Α. Βουθούνη, 2017.
- Στατική και Αντοχή Υλικών, Α. Πολυζάκης, 2017.