UNIVERSITY OF PATRAS
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Σημειώσεις διαλέξεων «Εφαρμοσμένη Υδραυλική»

Διάλεξη 8
08/12/2022

Λευθεριώτης Γεώργιος
Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Πατρών

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Εξισώσεις Chezy και Manning

Το 1768 ο Γάλλος μηχανικός **Antoine de Chezy** μελέτησε την αντίσταση στην κίνηση του νερού σε ανοικτούς αγωγούς, όταν του ζητήθηκε να σχεδιάσει μία διώρυγα για τη μεταφορά νερού από τον ποταμό Yvette στο Παρίσι.

Με βάση μετρήσεις πρότεινε την παρακάτω σχέση για τον υπολογισμό της μέσης ταχύτητας σε μία διατομή, η οποία ονομάστηκε **Εξίσωση Chezy**.

$$\boxed{V = C\sqrt{R_h J_o}}$$

όπου $\boldsymbol{R_h}$ είναι η υδραυλική ακτίνα, $\boldsymbol{J_o}$ (ή αλλιώς $\boldsymbol{S_f}$) είναι η κλίση της γραμμής ενέργειας (η οποία είναι ίση με την κλίση του πυθμένα για ομοιόμορφη ροή), και ο συντελεστής $\boldsymbol{C}$ ονομάζεται **συντελεστής Chezy**.

- Ο συντελεστής Chezy δεν είναι αδιάστατος αλλά έχει διαστάσεις $\mathbf{[L^{1/2}T^{-1}]}$.
- Η τυπική μονάδα μέτρησης του συντελεστή Chezy στο SI είναι $\mathbf{m^{1/2}/s}$.

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Εξισώσεις Chezy και Manning

Εξίσωση Chezy

$$\boxed{V = C\sqrt{R_h J_o}}$$

- Ο συντελεστής Chezy C δεν έχει σταθερή τιμή, και για τον υπολογισμό του έχουν προταθεί πολλές εμπειρικές σχέσεις.
- Για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων θεωρούμε ότι ο συντελεστής Chezy εξαρτάται μόνο από τη σχετική τραχύτητα ***ε*** μέσω της σχέσης :

$$\boxed{\frac{C}{\sqrt{8g}} = 2\log\left(\frac{12R_h}{\varepsilon}\right)}$$

Τιμές της σχετικής τραχύτητας *ε* για διαφορετικά υλικά κατασκευής ανοικτών αγωγών →

Υλικό	**ε (mm)**
Χάλυβας	0,05 – 0,2
Χυτοσίδηρος	0,25 – 1,0
Τσιμέντο	0,3 – 1,2

(Δημητρακόπουλος, 2018)

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Εξισώσεις Chezy και Manning

Εξίσωση Chezy $\boxed{V = C\sqrt{R_h J_o}}$

Η εξίσωση Chezy είναι παρόμοιας μορφής με την εξίσωση Darcy-Weisbach για κλειστούς αγωγούς.

$$\boxed{h_f = f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}}$$

Σε κυκλικούς αγωγούς $\boldsymbol{D = 4R_h}$ και επίσης ισχύει ότι $\boldsymbol{J_o = h_f/L}$. Η εξίσωση γίνεται:

$$h_f = f\,\frac{L}{4R_h}\frac{V^2}{2g} \Rightarrow V^2 = \frac{8g}{f}R_h\frac{h_f}{L} \Rightarrow V^2 = \frac{8g}{f}R_h J_o \Rightarrow V = \sqrt{\frac{8g}{f}}\sqrt{R_h J_o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V = C\sqrt{R_h J_o}} \quad \text{όπου} \quad C = \sqrt{\frac{8g}{f}}$$

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Εξισώσεις Chezy και Manning

Οι **Gauckler (1868)** και **Hagen (1881)** συμπέραναν ότι ο συντελεστής Chezy είναι ανάλογος με την έκτη ρίζα της υδραυλικής ακτίνας, δηλαδή: $C \approx R_h^{1/6}$

Πρότειναν λοιπόν την εξής σχέση: $\boxed{C = \frac{1}{n} R_h^{1/6}}$

Το 1891, το παραπάνω συμπέρασμα αποδόθηκε (**ίσως εσφαλμένα**) στον Ιρλανδό μηχανικό **Manning**.

Αν στην εξίσωση Chezy αντικαταστήσουμε από την παραπάνω εμπειρική σχέση τον συντελεστή Chezy **C**, προκύπτει η **εξίσωση Manning**

$$\boxed{V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} J_o^{1/2}}$$ **Εξίσωση Manning**

όπου ο συντελεστής ***n*** είναι ο συντελεστής τραχύτητας ή **συντελεστής Manning**

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Εξισώσεις Chezy και Manning

Εξίσωση Manning $$\boxed{V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} J_o^{1/2}}$$

Η εξίσωση Manning είναι μία εκ των σημαντικότερων εξισώσεων για προβλήματα ροής σε ανοικτούς αγωγούς.

Όπως και η εξίσωση Chezy, είναι εξίσωση **υπολογισμού της μέσης ταχύτητας σε μία διατομή**, λαμβάνοντας υπόψη την αντίσταση στην κίνηση του νερού.

Ο **συντελεστής Manning**

- Αποτελεί από πρακτική άποψη ένα μέτρο της τραχύτητας των τοιχωμάτων του ανοικτού αγωγού.
- Εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, αλλά ο κυριότερος είναι η τραχύτητα των τοιχωμάτων του αγωγού.
- Θεωρείται αδιάστατος συντελεστής, αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι. Έχει διαστάσεις [$L^{1/6}$]. Το γεγονός αυτό προκαλεί πολλές φορές παρερμηνείες κατά την εφαρμογή του.

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Κανονικό ή Ομοιόμορφο Βάθος Ροής

Κανονικό βάθος ροής, y_n ή αλλιώς **ομοιόμορφο βάθος ροής, y_o** είναι το βάθος της ομοιόμορφης ροής, το οποίο δεν μεταβάλλεται κατά μήκος του αγωγού.

Για δεδομένη τιμή της παροχής σε αγωγό γνωστής διατομής και κλίσης πυθμένα, και με γνωστό το συντελεστή Manning, το κανονικό βάθος μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση Manning

Η εξίσωση Manning δεν επιλύεται απευθείας, αλλά σε συνδυασμό με την εξίσωση της συνέχειας $Q = V \cdot A$ μπορεί να γραφεί στην εξής μορφή:

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} J_o^{1/2} \Rightarrow \frac{Q}{A} = \frac{1}{n} R_h^{2/3} J_o^{1/2} \Rightarrow Q \cdot n = A \cdot R_h^{2/3} J_o^{1/2} \Rightarrow \boxed{A \cdot R_h^{2/3} = \frac{Q \cdot n}{J_o^{1/2}}}$$

Το δεξί μέλος της εξίσωσης υπολογίζεται για δεδομένα Q, n και J_o

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι συνάρτηση του y_o και εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του αγωγού. Άρα λύνουμε με δοκιμές.

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Κανονικό ή Ομοιόμορφο Βάθος Ροής

Η εξίσωση Manning σε συνδυασμό με την εξίσωση της συνέχειας $Q = V \cdot A$ μπορεί να γραφεί επίσης στην εξής μορφή:

$$\boxed{Q = \frac{1}{n} A \cdot R_h^{2/3} \cdot J_o^{1/2}}$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί επίσης με την εξής μορφή:

$$\boxed{Q = K\sqrt{J_o}}$$

όπου ο συντελεστής ***K*** ονομάζεται συντελεστής μεταφοράς και ισούται με

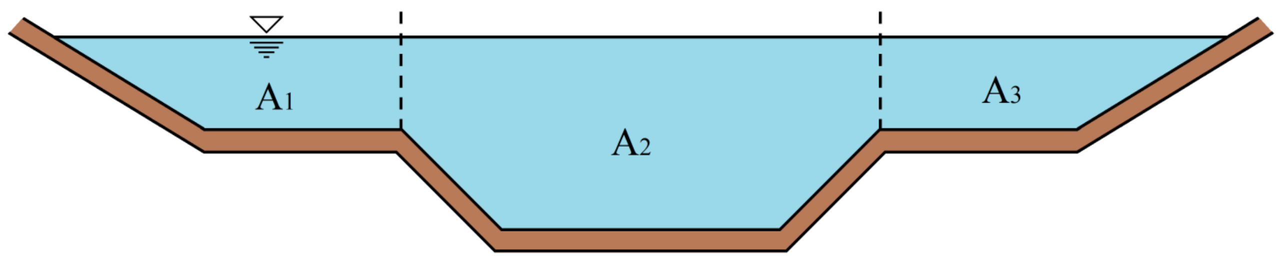
$$\boxed{K = \frac{1}{n} A \cdot R_h^{2/3}}$$

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Σύνθετη Διατομή

Σε περίπτωση σύνθετης διατομής με επιμέρους εμβαδά ροής $\boldsymbol{A_i}$ και συντελεστή Manning $\boldsymbol{n_i}$ η ταχύτητα σε κάθε επιμέρους εμβαδό θα είναι:

$$\boxed{V = \frac{Q_i}{A_i}}$$



Η συνολική παροχή θα είναι: $Q = \sum Q_i \Rightarrow Q = \sum \left(V_i A_i\right) \Rightarrow Q = V_1 A_1 + V_2 A_2 + V_3 A_3 \Rightarrow$

$$\boxed{\Rightarrow Q = \frac{1}{n_1} R_{h_1}^{2/3} J_0^{1/2} A_1 + \frac{1}{n_2} R_{h_2}^{2/3} J_0^{1/2} A_2 + \frac{1}{n_3} R_{h_3}^{2/3} J_0^{1/2} A_3}$$

Η μέση ταχύτητα θα είναι: $\boxed{\overline{V} = Q/A}$ όπου $\boxed{A = \sum_{i=1}^{N} A_i}$

<u>**Προσοχή:**</u> Στον υπολογισμό των βρεχόμενων περιμέτρων $\boldsymbol{P_i}$ συμμετέχουν μόνο τα τοιχώματα του αγωγού και όχι οι διακεκομμένες γραμμές.

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Κανονικό ή Ομοιόμορφο Βάθος Ροής

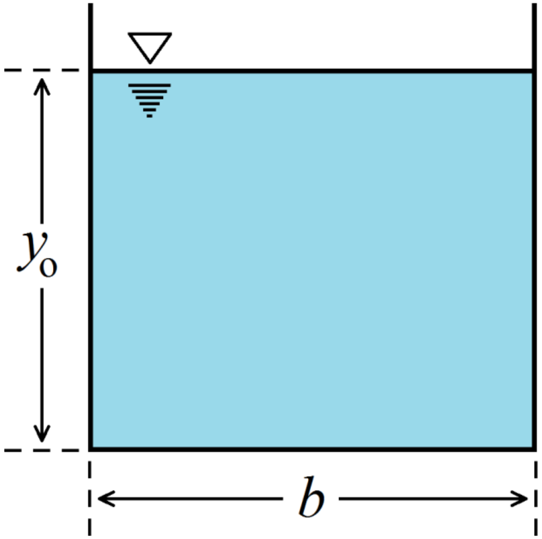
Εφαρμογή

Να υπολογίσετε το ομοιόμορφο βάθος ροής σε ορθογωνικό ανοικτό αγωγό που έχει πλάτος ίσο με ***b* = 3 m**, κλίση πυθμένα ίση με ***J*$_o$ = 0.00025** και μεταφέρει παροχή ίση με ***Q* = 6 m^3/s**. Ο συντελεστής **Manning** του αγωγού είναι ***n* = 0,013**.

Επίλυση

Η εξίσωση Manning παίρνει τη μορφή:

$$A \cdot R_h^{2/3} = \frac{Q \cdot n}{J_o^{1/2}} \Rightarrow A \cdot R_h^{2/3} = \frac{6 \cdot 0,013}{0,00025^{1/2}} \Rightarrow \boxed{A \cdot R_h^{2/3} = 4,933}$$



Αντικαθιστούμε τα ***A*** και ***R$_h$*** με τα ***y$_o$*** και ***b*** και έχουμε:

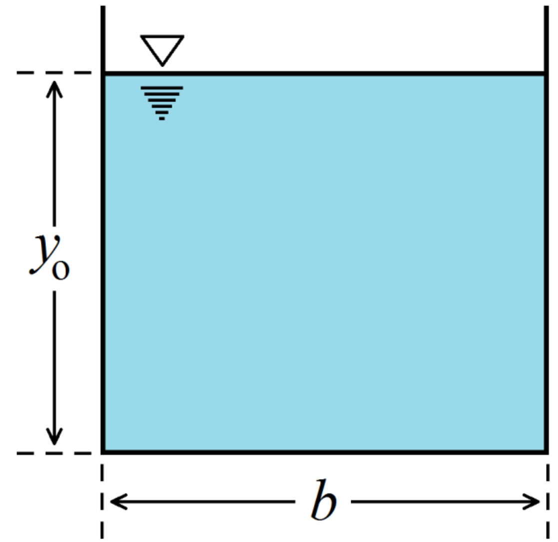
$$A \cdot R_h^{2/3} = (b \cdot y_o) \cdot \left(\frac{b \cdot y_o}{b + 2y_o} \right)^{2/3} = (3 \cdot y_o) \cdot \left(\frac{3 \cdot y_o}{3 + 2y_o} \right)^{2/3}$$

Κανονικό ή Ομοιόμορφο Βάθος Ροής

Επίλυση

Άρα θα ισχύει ότι:

$$A \cdot R_h^{2/3} = (3 \cdot y_o) \cdot \left(\frac{3 \cdot y_o}{3 + 2y_o} \right)^{2/3} = 4,933$$



Λύνουμε με δοκιμές:

$$y_o = 2m \quad \rightarrow \quad A \cdot R_h^{2/3} = 5,414$$

$$y_o = 1,5m \quad \rightarrow \quad A \cdot R_h^{2/3} = 3,714$$

$$y_o = 1,9m \quad \rightarrow \quad A \cdot R_h^{2/3} = 5,067$$

$$y_o = 1,85m \quad \rightarrow \quad A \cdot R_h^{2/3} = 4,895$$

$$y_o = 1,86m \quad \rightarrow \quad A \cdot R_h^{2/3} = 4,93 \quad \checkmark$$

Άρα το ομοιόμορφο βάθος ροής είναι ίσο με:

$$\boxed{y_o = 1,86m}$$

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Υδραυλικά Βέλτιστη Διατομή

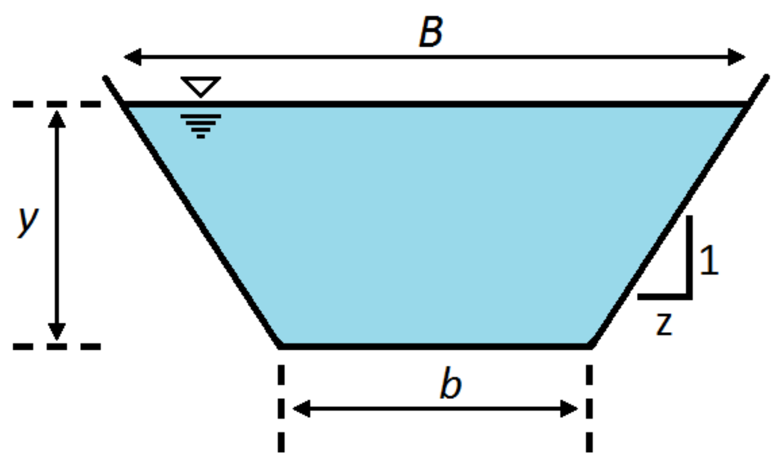
Η διατομή η οποία για δεδομένη παροχή απαιτεί το ελάχιστο εμβαδό ροής A, δηλαδή η διατομή με τη μικρότερη βρεχόμενη περίμετρο *P*.

Γενικά, η διατομή με την ελάχιστη περίμετρο είναι η ημικυκλική, της οποίας η χρήση όμως δεν είναι δυνατή για αγωγούς που κατασκευάζονται με εκσκαφή ή επιχωμάτωση.

Η διατομή που χρησιμοποιείται συνήθως είναι η τραπεζοειδής. Το εμβαδό ροής και η βρεχόμενη περίμετρος της τραπεζοειδούς διατομής είναι:

$$A = by + zy^2$$

$$P = b + 2y\sqrt{1 + z^2}$$



Υδραυλικά Βέλτιστη Διατομή

Για δεδομένη τιμή της επιφάνειας *A*, η βρεχόμενη περίμετρος παίρνει την ελάχιστη τιμή της όταν:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow \ldots \quad \text{μετά από πράξεις } \ldots \Rightarrow \boxed{b = 2y\left(\sqrt{1+z^2} - z\right)} \quad (1)$$

Για δεδομένη τιμή της κλίσης των πρανών *z*, η σχέση μεταξύ βάθους *y* και πλάτους πυθμένα *b* δίνεται από τη σχέση (1).

Όταν η κλίση πρανών *z*, μπορεί να μεταβάλλεται, ισχύει ότι:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \Rightarrow \ldots \quad \text{μετά από πράξεις } \ldots \Rightarrow \boxed{b = \frac{2}{\sqrt{3}}\,y}$$

Στην ειδική περίπτωση της ορθογωνικής διατομής ($z = 0$), για τη βέλτιστη διατομή ισχύει ότι: $\boxed{b = 2y}$

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Βιβλιογραφία

- Δημητρακόπουλος Α. **Στοιχεία υδραυλικής κλειστών και ανοικτών αγωγών**, Εκδόσεις Gotsis, 2018.
- Λιακόπουλος Α. **Υδραυλική**, 3η έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλα, 2020,
- Στάμου Α. **Εφαρμοσμένη Υδραυλική**, 3η έκδοση, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα, 2016.