«Εφαρμοσμένη Υδραυλική»

Άσκηση 6
Ανοικτοί Αγωγοί

Λευθεριώτης Γεώργιος
Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Πατρών

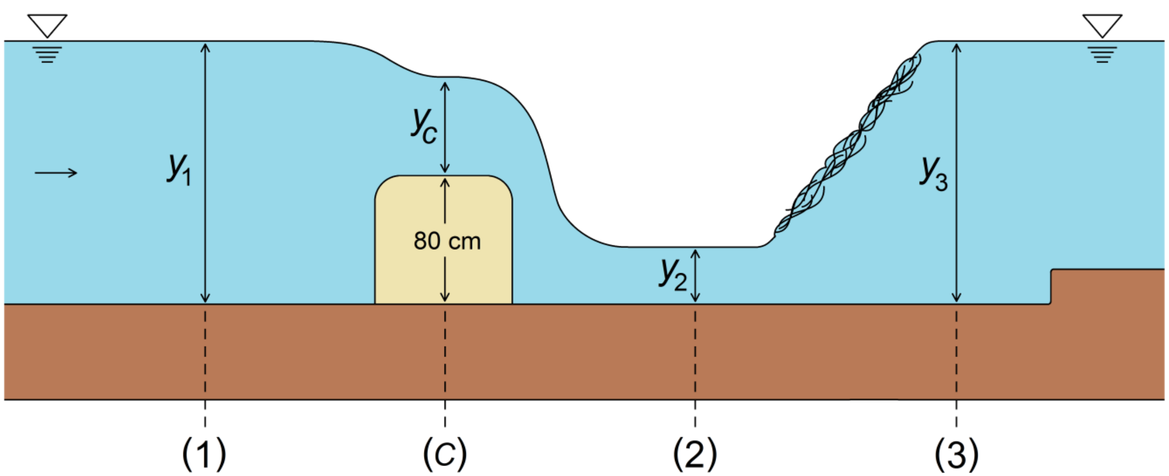
Άσκηση 6

Σε ορθογωνική διώρυγα πλάτους b = 2,5 m υπάρχει αναβαθμός ύψους 80 cm όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στο μέσο του αναβαθμού το βάθος του νερού είναι κρίσιμο και ίσο με 0,58 m. Να υπολογιστούν τα παρακάτω μεγέθη θεωρώντας αμελητέες απώλειες:

α) Η παροχή της διώρυγας.

β) Τα βάθη ροής y_1 και y_2 ανάντη και κατάντη του αναβαθμού.

γ) Το βάθος y_3 μετά το υδραυλικό άλμα.



Άσκηση 6

Λύση

α) Για το κρίσιμο βάθος σε ορθογωνική διατομή ισχύει ότι:

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}}$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την παροχή αφού όλα τα άλλα μεγέθη είναι γνωστά:

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} \Rightarrow {y_c}^3 = \frac{Q^2}{gb^2} \Rightarrow Q^2 = y_c^3 \cdot g \cdot b^2 \Rightarrow Q = \sqrt{y_c^3 \cdot g \cdot b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \sqrt{0,58^3 \cdot 9,81 \cdot 2,5^2} \Rightarrow \boxed{Q = 3,46 \ \ m^3/s}$$

Άσκηση 6

Λύση

β) Εφαρμόζουμε την εξίσωση της ενέργειας μεταξύ των θέσεων (1), (c) και (2) θεωρώντας αμελητέες τις απώλειες:

$$y_1 + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_c + z_c + \frac{V_c^2}{2g} = y_2 + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \qquad 1$$

όπου:

$$z_1 = z_2 = 0 \qquad z_c = 0{,}8\ m \qquad y_c = 0{,}58\ m$$

Η ταχύτητα V_1 εκφράζεται ως συνάρτηση του y_1 από την εξίσωση της συνέχειας:

$$Q = V_1 \cdot A_1 \Rightarrow V_1 = \frac{Q}{A_1} \Rightarrow V_1 = \frac{Q}{b \cdot y_1}$$

Άσκηση 6

Λύση

Ομοίως η ταχύτητα V_2 εκφράζεται ως συνάρτηση του y_2 από την εξίσωση της συνέχειας:

$$Q = V_2 \cdot A_2 \Rightarrow V_2 = \frac{Q}{A_2} \Rightarrow V_2 = \frac{Q}{b \cdot y_2}$$

Η ταχύτητα V_c μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση της συνέχειας ή από τον αριθμό Froude αφού γνωρίζουμε ότι στην κρίσιμη διατομή ισχύει $Fr = 1$:

$$Q = V_c \cdot A_c \Rightarrow V_c = \frac{Q}{A_c} = \frac{Q}{b \cdot y_c} = \frac{3,46}{2,5 \cdot 0,58} \Rightarrow V_c = 2,39 \ m/s$$

ή

$$Fr = 1 \Rightarrow \frac{V_c}{\sqrt{g \cdot y_c}} = 1 \Rightarrow V_c = \sqrt{g \cdot y_c} = \sqrt{9,81 \cdot 0,58} \Rightarrow V_c = 2,39 \ m/s$$

Άσκηση 6

Λύση

Άρα η εξίσωση της ενέργειας γίνεται:

1 $$\Rightarrow y_1 + \frac{Q^2}{b^2 \cdot y_1^2 \cdot 2g} = y_c + z_c + \frac{V_c^2}{2g} = y_2 + \frac{Q^2}{b^2 \cdot y_2^2 \cdot 2g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 + \frac{3,46^2}{2,5^2 \cdot y_1^2 \cdot 2g} = 0,58 + 0,8 + \frac{2,39^2}{2g} = y_2 + \frac{3,46^2}{2,5^2 \cdot y_2^2 \cdot 2g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 + \frac{0,098}{y_1^2} = 1,671 = y_2 + \frac{0,098}{y_2^2}$$ 2

Άρα τα βάθη y_1 και y_2 είναι ρίζες της ίδιας εξίσωσης. Λύνουμε με δοκιμές

Μπορεί να λυθεί και σαν τριτοβάθμια εξίσωση, βλέπε τελευταία διαφάνεια

Άσκηση 6

Λύση

Για το y_1 πρέπει να σκεφτούμε ότι $y_1 > y_c$ (φαίνεται και από το σχήμα)

$$y_1 + \frac{0,098}{y_1^2} = 1,671$$

- $y_1 = 1,67\ m \quad \rightarrow \quad y_1 + \frac{0,098}{y_1^2} = 1,705\ m$
- $y_1 = 1,65\ m \quad \rightarrow \quad y_1 + \frac{0,098}{y_1^2} = 1,686\ m$
- $y_1 = 1,64\ m \quad \rightarrow \quad y_1 + \frac{0,098}{y_1^2} = 1,676\ m$

Ικανοποιητική τιμή

Άρα $y_1 = 1,64\ m$

Άσκηση 6

Λύση

Για το y_2 πρέπει να σκεφτούμε ότι $y_2 < y_c$ (φαίνεται και από το σχήμα)

$$y_2 + \frac{0,098}{y_2^2} = 1,671$$

- $y_2 = 0,3\ m \quad \rightarrow \quad y_2 + \frac{0,098}{y_2^2} = 1,388\ m$
- $y_2 = 0,25\ m \quad \rightarrow \quad y_2 + \frac{0,098}{y_2^2} = 1,818\ m$
- $y_2 = 0,26\ m \quad \rightarrow \quad y_2 + \frac{0,098}{y_2^2} = 1,709\ m$
- $y_2 = 0,265\ m \quad \rightarrow \quad y_2 + \frac{0,098}{y_2^2} = 1,661\ m$

Ικανοποιητική τιμή

Άρα $y_2 = 0,265\ m$

Άσκηση 6

Λύση

γ) Για το βάθος y_3 μετά το υδραυλικό άλμα θα κάνουμε χρήση της εξίσωσης για τα συζυγή βάθη σε ορθογωνική διατομή

$$\frac{y_3}{y_2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8Fr_2^2}-1\right)\Rightarrow y_3=\frac{1}{2}y_2\left(\sqrt{1+8Fr_2^2}-1\right)\Rightarrow y_3=\frac{1}{2}\cdot 0,265\cdot\left(\sqrt{1+8\cdot 10,48}-1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y_3=1,088\ m}$$

όπου $\quad Fr_2=\dfrac{V_2}{\sqrt{g\cdot y_2}}\Rightarrow Fr_2^2=\dfrac{V_2^2}{g\cdot y_2}\Rightarrow Fr_2^2=\dfrac{5,22^2}{9,81\cdot 0,265}\Rightarrow Fr_2^2=10,48$

$$V_2=\frac{Q}{A_2}=\frac{Q}{b\cdot y_2}=\frac{3,46}{2,5\cdot 0,265}\Rightarrow V_2=5,22\ m/s$$

Άσκηση 6

Λύση

Σημείωση: Η εξίσωση 2 μπορεί να λυθεί και σαν τριτοβάθμια εξίσωση με αριθμομηχανή

$$y+\frac{0,098}{y^2}=1,671 \Rightarrow y^3+0,098=1,671\cdot y^2 \Rightarrow y^3-1,671\cdot y^2+0,098=0$$

όπου $y=y_1=y_2$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι εξής:

$y=1,634\ m$ Δεκτή, άρα επειδή πρέπει $y_1>y_c \Rightarrow \boxed{y_1=1,634\ m}$

$y=-0,227\ m$ Απορρίπτεται

$y=0,264\ m$ Δεκτή, άρα επειδή πρέπει $y_2<y_c \Rightarrow \boxed{y_2=0,264\ m}$