ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

Ακ. Έτος 2022-2023

Αγγελική Απ. Γαλάνη

ΕΔΙΠ Τμήματος Αειφορικής Γεωργίας Πανεπιστημίου Πατρών

Σφάλματα- Μετρήσεις

Η έννοια του σφάλματος στη μέτρηση κάποιου φυσικοχημικού μεγέθους, αναφέρεται στην ακρίβεια της μέτρησης.

Είναι δηλαδή η αβεβαιότητα των μετρήσεων η οποία οφείλεται στα όργανα μέτρησης, στην πειραματική διαδικασία, στις συνθήκες του πειράματος, στον ίδιο τον αναλυτή.

Κάθε μέτρηση γράφεται με τη μορφή:

Τιμή ± αβεβαιότητα(ή σφάλμα)

Συστηματικά ή καθορισμένα σφάλματα

Είναι τα σφάλματα που μένουν αμετάβλητα σε διαδοχικές μετρήσεις ή εκείνα που μεταβάλλονται με συστηματικό τρόπο είτε με το χρόνο είτε με άλλη παράμετρο.

Οφείλονται σε ατέλειες των οργάνων, στη μέθοδο ή στον παρατηρητή.

Ανιχνεύονται δύσκολα και συχνά είναι τα σημαντικότερα.

Τυχαία σφάλματα

Οφείλονται σε πολλούς και απρόβλεπτους παράγοντες και μεταβάλλονται με ακανόνιστο τρόπο με το χρόνο.

Παράδειγμα τέτοιων είναι όσα οφείλονται στο θερμικό θόρυβο των οργάνων.

Θεωρία σφαλμάτων

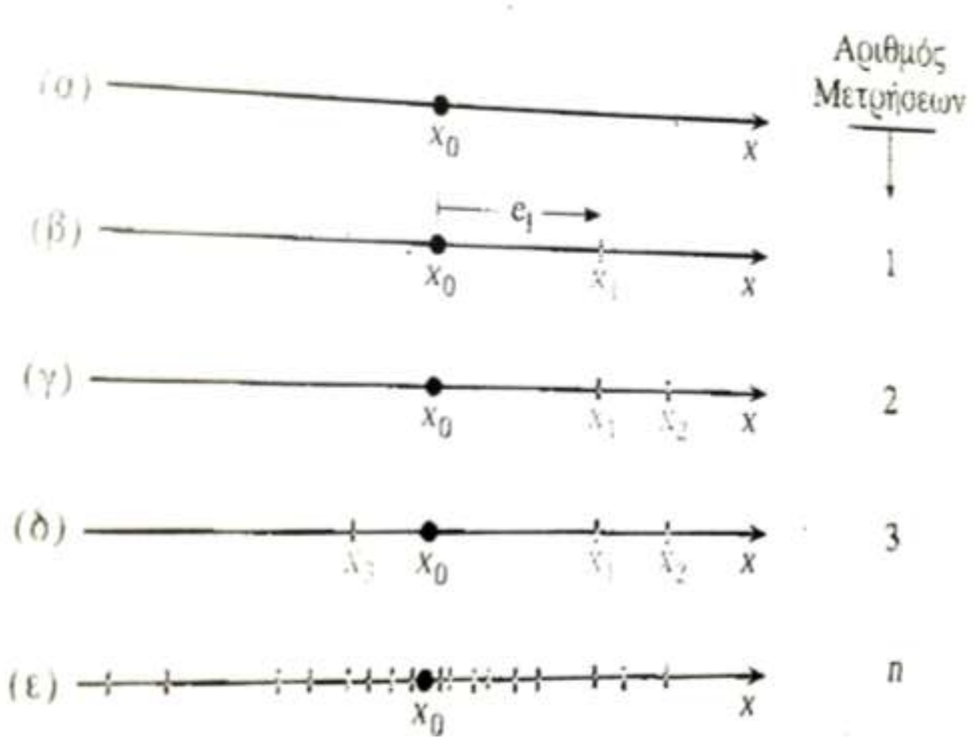
Έστω

- x η τιμή κάποιου φυσικού μεγέθους
- x_o η πραγματική του τιμή που μας είναι άγνωστη

Μια μέτρηση δίνει αποτέλεσμα x_1 που λόγω τυχαίων σφαλμάτων διαφέρει από τη x_o κατά $e_1=x_1-x_o$ Και το x_o και το e_i είναι άγνωστα.

Δεύτερη μέτρηση δίνει x_2 και σφάλμα $e_2 = x_2-x_o$

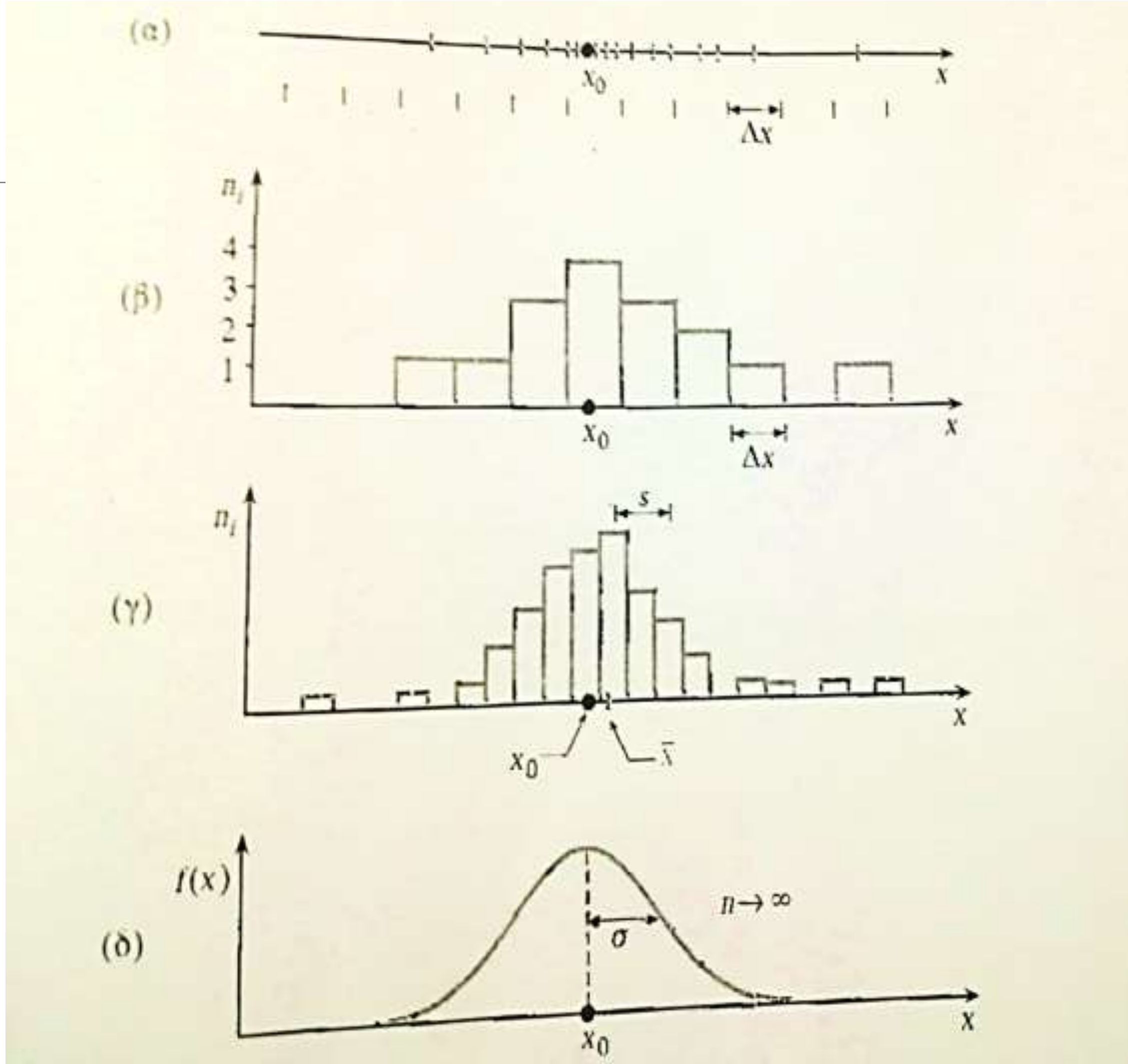
Αν κάνουμε n φορές τη μέτρηση θα έχουμε n αποτελέσματα



Η διασπορά αποτελεσμάτων γύρω από την πραγματική τιμή (x_o) φαίνεται καλύτερα αν κατασκευαστεί ιστόγραμμα των μετρήσεων.

Αυτό γίνεται ως εξής:

Χωρίζεται ο άξονας των x στην περιοχή των μετρήσεων σε ίδια διαστήματα κάποιου Δx. Ακολούθως μετριέται ο αριθμός των μετρήσεων n_i σε κάθε διάστημα και υψώνεται σε κάθε διάστημα στήλη ύψους ανάλογου του n_i.



Με βάση το ιστόγραμμα των μετρήσεων ορίζονται κάποια χαρακτηριστικά μεγέθη

Μέση τιμή σειράς μετρήσεων

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Εφόσον ισχύει για κάθε μέτρηση $e_1 = x_1 - x_o$ θα ισχύει και ότι:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_0 + e_i) = x_0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i$$

Όπως είναι φανερό, η μέση τιμή είναι αυτή που πλησιάζει πιο πολύ στην πραγματική για σειρά μετρήσεων n

Τυπική απόκλιση μιας σειράς μετρήσεων

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Κανονική κατανομή

Θεωρώντας πως ο αριθμός των μετρήσεων n, γίνεται συνεχώς μεγαλύτερος, το ιστόγραμμα (κατανομή των μετρήσεων), προσδιορίζεται με μεγαλύτερη ακρίβεια.

Από τον ορισμό του s $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ φαίνεται πως για κάθε παραπάνω μέτρηση, το άθροισμα του αριθμητή αυξάνει κατά κάποιο όρο d_i^2 και ο παρονομαστής n, αυξάνει κατά μια μονάδα. Για πολύ μεγάλα n, τελικά η τιμή του s, τείνει στο να σταθεροποιηθεί σε μια τιμή σ_o, που ονομάζεται τυπική απόκλιση της κατανομής

$$\sigma_0 = \lim_{n \to \infty} s = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_0)^2}{n}}$$

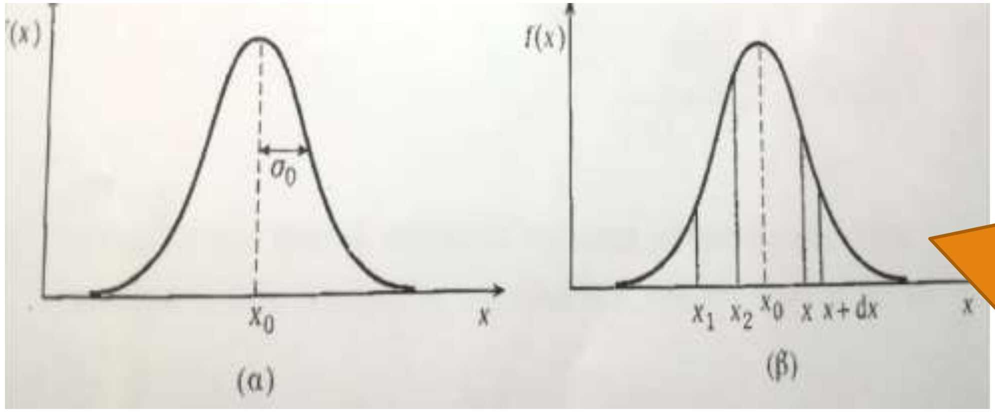
Η σ_o είναι άγνωστη όπως και η x_o. Όταν $\Delta x \to 0$ και $n \to \infty$, η μέση τιμή $\bar{x}$ τείνει στην πραγματική x_o. Τότε το ιστόγραμμα των μετρήσεων γίνεται συνεχής καμπύλη f(x) που ονομάζεται συνάρτηση κατανομής και είναι κανονικοποιημένη, γιατί το εμβαδό κάτω από την καμπύλη είναι μονάδα.

Κανονική κατανομή

Θεωρητικά κάτω από κάποιες προϋποθέσεις η μορφή της καμπύλης f(x) είναι δυνατόν να προβλεφθεί. Σύμφωνα με τον Laplace (1783), η συνάρτηση κατανομής των μετρήσεων δίνεται από τη σχέση

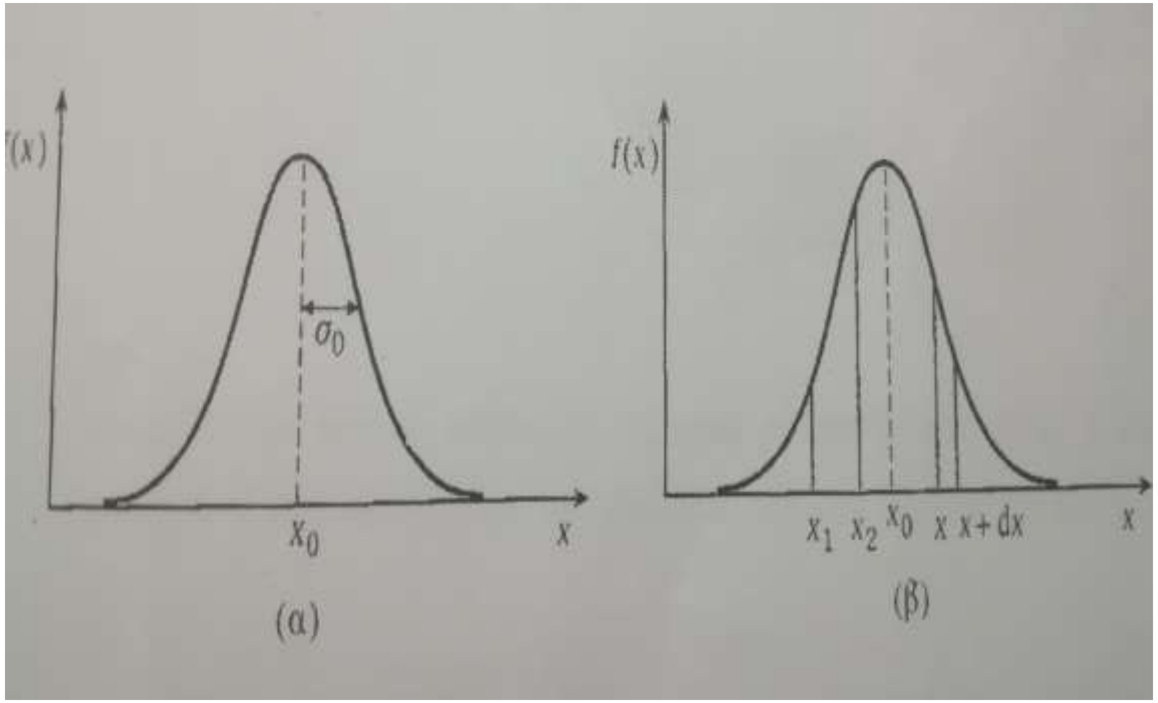
$$f(x) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma_0^2}$$

Ο Gauss βασίστηκε στην υπόθεση πως η πιθανότερη τιμή μετρούμενου μεγέθους είναι η μέση τιμή μιας σειράς μετρήσεων. Έτσι βρήκε την ίδια κατανομή, η οποία είναι γνωστή ως κατανομή Gauss ή ως κανονική κατανομή. Έχει μέγιστο για $x=x_o$, που συνεπάγεται πως τιμές κοντά στο x_o είναι πιθανότερες ενώ μετρήσεις με μεγάλες αποκλίσεις σπανιότερες. Εφόσον υποθέτουμε πως θετικές και αρνητικές αποκλίσεις από το x_o, έχουν ίδια πιθανότητα, η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς $x=x_o$



Το ολοκλήρωμα μεταξύ $x \rightarrow -\infty$ και $x \rightarrow +\infty$ είναι ίσο με μονάδα άρα η κατανομή είναι κανονικοποιημένη. Το εμβαδό κατω από την καμπύλη μεταξύ x_1 και x_2 δίνει την πιθανότητα κάποια μέτρηση του x να είναι μεταξύ των x_1 και x_2

Κανονική κατανομή



Από τον υπολογισμό των εμβαδών προκύπτουν τα παρακάτω για την πιθανότητα μια μέτρηση να βρίσκεται μεταξύ:

x_o-$σ_o$ και x_o+$σ_o$ 68,3%

x_o-2$σ_o$ και x_o+2$σ_o$ 95,4%

x_o-3$σ_o$ και x_o+3$σ_o$ 99,76%

Τυπική απόκλιση μιας μέτρησης

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Είναι η καλύτερη εκτίμηση που μπορούμε να κάνουμε για την τυπική απόκλιση της κατανομής (σ_o)

Τυπική απόκλιση της μέσης τιμής

Η τυπική απόκλιση της μιας μέτρησης, αποτελεί μέτρο της διασποράς των μετρήσεων γύρω από την πραγματική τιμή x_o και είναι χρήσιμη στην αξιολόγηση της ακρίβειας της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε.

Ωστόσο αυτό που περισσότερο ενδιαφέρει, είναι η απόκλιση της μέσης τιμής $\bar{x}$ από την πραγματική x_o

Τυπική απόκλιση μέσης τιμής σ_μ

$$\sigma_\mu = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής σ_μ, όταν αναφέρεται στην τιμή $\bar{x}$ συμβολίζεται με $\sigma_{\bar{x}}$ και λέγεται και τυπικό σφάλμα ή σφάλμα μέτρησης του x. Συμβολίζεται και με δ_x

$$\delta x = \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Το αποτέλεσμα σειράς μετρήσεων, δίνεται ως x=x ± δ_x (μονάδες)

Σχετική τυπική απόκλιση της μέσης τιμής ή σχετικό σφάλμα της x

εκφράζεται και ως %

$$\sigma_{\sigma x} = \frac{\delta x}{\bar{x}}$$

$$\sigma_{\sigma x} = 100\,\frac{\delta x}{\bar{x}}\,\%.$$

Έστω 6 μετρήσεις μήκους σε mm

Μέση τιμή

$\bar{x}$= 5800,9/6=966,82 mm

Τυπική απόκλιση της μιας μέτρησης

$\sigma = \sqrt{336{,}36/(6-1)} = 8{,}2$ mm

Τυπική απόκλιση ή σφάλμα μέσης τιμής

$\delta\bar{x} = \sqrt{336{,}36/6x5} = 3{,}35$ mm

Αποτέλεσμα

x = 966,82 ± 3,35 mm (6 μετρήσεις)

i	x_i (mm)	$x_i - \bar{x}$ (mm)	$(x_i - \bar{x})^2$ (mm)
1	950,2	-16,62	267,2
2	970,3	-3,48	12,1
3	972,6	5,78	33,4
4	968,1	1,28	1,64
5	971,2	4,38	19,2
6	968,5	1,68	2,82
Σ	5800,9		336,36

ΚΑΝΟΝΕΣ ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΨΗΦΙΩΝ

Δεκαδικοί αριθμοί :

- Τα μηδενικά αριστερά από το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο δεν λογαριάζονται ως ΣΨ.

  5,11 cm 0,115 cm 0,000412 cm όλοι 3 σημαντικά ψηφία

- Τερματικά μηδενικά δεξιά της υποδιαστολής είναι πάντα σημαντικά

  5,00 cm 9,10 cm 50,0 cm όλοι 3 σημαντικά ψηφία

ΚΑΝΟΝΕΣ ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΨΗΦΙΩΝ

Μη δεκαδικοί αριθμοί:

Τερματικά μηδενικά σε μη δεκαδικούς αριθμούς, μπορεί να είναι σημαντικά μπορεί και όχι.

Για παράδειγμα έστω μετράμε την ομική αντίσταση R = 21000 Ohm

Δεν γνωρίζουμε αν τα τρία τελευταία μηδενικά είναι σημαντικά ψηφία. Το αποτέλεσμα θα πρέπει να γραφεί ως δύναμη του 10

- 2.1×10^4 ο αριθμός έχει δύο σημαντικά ψηφία και βέβαιο είναι μόνο το πρώτο
- 2.10×10^4 ο αριθμός έχει τρία σημαντικά ψηφία και αβέβαιο είναι το τελευταίο μηδενικό

Σημαντικά ψηφία σε υπολογισμούς

- Σε πολλαπλασιασμό ή διαίρεση, το αποτέλεσμα δίνεται με τόσα σημαντικά ψηφία όσα έχει η μέτρηση με τα λιγότερα σημαντικά.

- Σε πρόσθεση ή αφαίρεση το αποτέλεσμα δίνεται με τόσα σημαντικά ψηφία όσα έχει η μέτρηση με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία

Στρογγυλοποίηση

Έτσι ονομάζεται η διαδικασία απόρριψης ψηφίων που δεν είναι σημαντικά από το αποτέλεσμα υπολογισμών και η τροποποίηση του τελευταίου ψηφίου που μένει

Όλη η προσοχή δίνεται στο πρώτο από αριστερά ψηφίο που πρέπει να απορρίψουμε.

- Εάν αυτό είναι 5 ή μεγαλύτερο, προσθέτουμε μια μονάδα στο ψηφίο που προηγείται και και απορρίπτουμε όσα ψηφία βρίσκονται δεξιά αυτού.

  Στρογγυλοποίηση σε τρία σημαντικά του 3,3453 δίνει 3,35

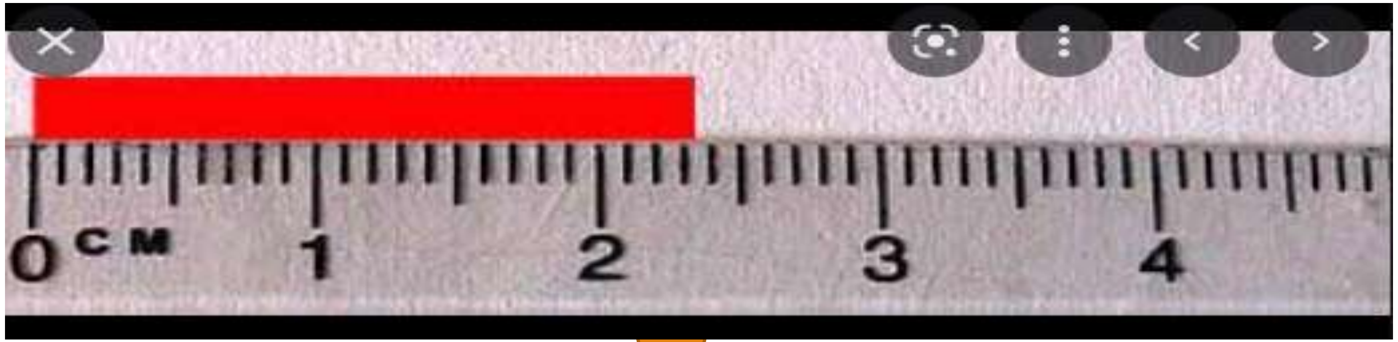
- Εάν είναι μικρότερο του 5 απλώς το απορρίπτουμε με όλα τα υπόλοιπα που βρίσκονται δεξιά του

  Στρογγυλοποίηση του 3,3443 σε τρία σημαντικά ψηφία δίνει 3,34

Σφάλμα ανάγνωσης

Αναλογικά

Το σφάλμα θα είναι το ½ της ελάχιστης υποδιαίρεσης του οργάνου



Η μέτρηση είναι πιο κοντά στα 23 mm
Αρα τελικά το σφάλμα ανάγνωσης 0.50 mm
Και η μέτρηση (23 ± 0.50) mm

Ψηφιακά

Πρέπει να θεωρείται αβέβαιο το τελευταίο ψηφίο. Επειδή συνήθως δεν είναι γνωστό αν το όργανο στρογγυλεύει το αποτέλεσμα στο τελευταίο ψηφίο, πρέπει να παίρνουμε ως σφάλμα ανάγνωσης μια μονάδα στο τελευταίο ψηφίο της ένδειξης.

Η ένδειξη 12.034, έχει σφάλμα ανάγνωσης ±0,001

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

«Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής», Τόμος Ι, Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο, Τομέας Φυσικής Γενικό Τμήμα, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1994

«Ανάλυση Σφαλμάτων», Ε-Π Χριστοπούλου, ΄Καθηγήτρια Τμήματος Φυσικής Σχολής Θετικών επιστημών Πανεπιστημίου Πατρών, Μάρτιος 2005

Νταρακάς Ευθύμιος, Πεταλά Μαρία, Τσιρίδης Βασίλειος, «Περιβαλλοντική Χημεία και Μηχανική», 2020, Εκδόσεις Τζόλα