Εξοικονόμηση Ενέργειας και Ορθολογική Χρήση της

Εμμανουήλ Σουλιώτης
Φυσικός

Στόχοι του Μαθήματος

- Κατανόηση της Έννοιας της Ενέργειας
- Εξοικονόμηση της Ενέργειας
- Ορθολογική Χρήση της Ενέργειας
- Παραγωγή της Ενέργειας
- Κτήριο και Ενέργεια

Διδασκαλία του Μαθήματος

- Διαλέξεις
- Ασκήσεις – Εφαρμογές (20%)
- Εργασία (30%)
- Τελικές Γραπτές Εξετάσεις (50%)

Βασικές Έννοιες

- Ενέργεια
- Μορφές της Ενέργειας
- Αξιοποίηση της Ενέργειας
- Εξοικονόμηση της Ενέργειας
- Θερμότητα: Μηχανισμοί μετάδοσης Θερμότητας
- Κτήριο και Ενέργεια
- Δράσεις για Εξοικονόμηση και Παραγωγή Ενέργειας

Τι είναι η ενέργεια;

- Η ενέργεια μια έννοια που χρησιμοποιείται πολύ συχνά
- Το νόημά της στην καθημερινή ζωή δεν είναι ίδιο με το νόημά της στη Φυσική
- Η ενέργεια της Φυσικής χαρακτηρίζει συστήματα και όχι μεμονωμένα σώματα (αν και συχνά μοιάζει να μιλάμε με αυτό τον τρόπο)
- Στη φύση έχουμε δίκτυα ενέργειας τα οποία περιορίζουν τις εφικτές αλλαγες χωρις να προσδιορίζουν «κατεύθυνση»
- Η «κατεύθυνση» είναι πάντα τέτοια που το έργο που δύναται να παραχθεί να μειώνεται συνολικά. Ωστόσο μπορεί να αυξηθεί τοπικά στα πλαίσια αλληλεπιδράσεων.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ — ΜΟΡΦΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

- ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ
- ΦΩΤΕΙΝΗ
- ΧΗΜΙΚΗ
- ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ
- ΘΕΡΜΙΚΗ
- ΕΛΑΣΤΙΚΗ
- ΚΙΝΗΤΙΚΗ

ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΙΜΕΣ
ΜΟΡΦΕΣ

ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ

ΦΩΤΕΙΝΗ

ΜΟΡΦΕΣ
ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

ΧΗΜΙΚΗ

ΜΗ
ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΙΜΕΣ
ΜΟΡΦΕΣ

ΕΛΑΣΤΙΚΗ

ΚΙΝΗΤΙΚΗ

Μετατροπή ενέργειας

Μορφή ενέργειας που παίρνει	Μορφή ενέργειας που δίνει
Ηλεκτρική ενέργεια	Θερμική ενέργεια Φωτεινή ενέργεια
Ηλεκτρική ενέργεια	Θερμική ενέργεια
Ηλεκτρική ενέργεια	Θερμική ενέργεια Φωτεινή ενέργεια

Μετατροπή ενέργειας στον άνθρωπο

Χημική ενέργεια → Θερμική ενέργεια

Χημική ενέργεια (τροφές)

οξυγόνο

ΚΑΥΣΗ

Διοξείδιο του άνθρακα

υδρατμοί

Θερμική ενέργεια (θερμότητα)

Μετατροπή ενέργειας στον άνθρωπο

Θερμίδες που παίρνουμε με την τροφή μας

=

Θερμίδες που ξοδεύουμε με διάφορες δραστηριότητες

Πηγές ενέργειας

Ηλεκτρική ενέργεια

κίνηση νερού

κίνηση ανέμου

κίνηση ατμού

→ στρόβιλος → ηλεκτρική γεννήτρια

Άλλες πηγές ενέργειας

Αιολική ενέργεια

Βιομάζα

Υδροηλεκτρική ενέργεια

Παλιρροϊκή ενέργεια

Πυρηνική ενέργεια

Κυματική ενέργεια

Ηλιακή ενέργεια

Πετρέλαιο

Φυσικό αέριο

Γεωθερμική ενέργεια

Ορυκτό κάρβουνο

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Η ***Επιστήμη της Θερμοδυναμικής*** ασχολείται με την ποσότητα της ***θερμότητας*** που μεταφέρεται σε ένα κλειστό και απομονωμένο σύστημα από μια κατάσταση ισορροπίας σε μια άλλη κατάσταση ισορροπίας χωρίς να γίνεται λόγος για το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί.

Η Μηχανική όμως ενδιαφέρεται συχνά για το ρυθμό μετάδοσης της ***θερμότητας*** από ή προς το σύστημα. Αυτό είναι το αντικείμενο μελέτης στη ***Μετάδοση Θερμότητας***. Αρχικά παρουσιάζονται οι θεμελιώδεις αρχές της θερμοδυναμικής που διαμορφώνουν το αντικείμενο της μετάδοσης θερμότητας και οι τρεις μηχανισμοί που υπεισέρχονται. Αυτοί είναι:

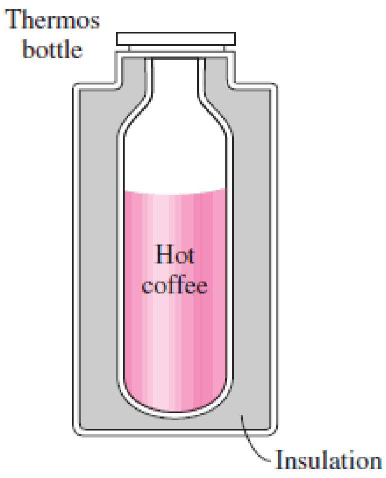
1. **Αγωγή (Conduction):** Είναι η μηχανισμός εκείνος που βασίζεται στη μετάδοση θερμότητας από τα σωματίδια της ύλης που έχουν υψηλότερη εσωτερική ενέργεια προς σε εκείνα χαμηλότερης εσωτερικής ενέργειας μέσω αλληλεπιδράσεων μεταξύ τους.
2. **Μεταφορά ή συναγωγή (Convection):** Είναι ο μηχανισμός εκείνος μεταξύ στερεών και υγρών ή αερίων (ρευστά) τα οποία βρίσκονται σε κίνηση και διέπεται από την ταυτόχρονη διεργασία αγωγής και κίνησης του ρευστού.
3. **Ακτινοβολία (Radiation):** Είναι η ενέργεια που εκπέμπεται από την ύλη μέσω ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (ή φωτονίων) ως αποτέλεσμα μεταβολών στην ηλεκτρονική δομή των ατόμων ή τον μορίων.

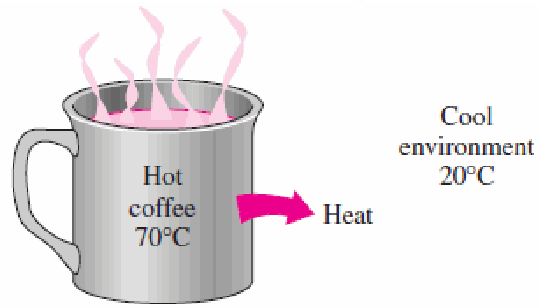
ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Η μετάδοση της ενέργειας πραγματοποιείται από ένα σύστημα (ή μέσο) υψηλότερης θερμοκρασίας σε ένα άλλο χαμηλότερης θερμοκρασίας. <u>Η ενέργεια ως φυσικό μέγεθος δεν μπορεί να οριστεί</u>. Μπορεί μόνο να γίνει αντιληπτή από τα αποτελέσματα που προκαλούνται από τη μετάδοσή της. Υφίσταται σε διάφορες μορφές και στις διαλέξεις που θα ακολουθήσουν ενδιαφερόμαστε αποκλειστικά και μόνο για τη *θερμότητα*, <u>η οποία είναι η μορφή της ενέργειας που μπορεί να μεταδοθεί από ένα σύστημα σε ένα άλλο ως αποτέλεσμα της θερμοκρασιακής τους διαφοράς</u>. Η επιστήμη που ασχολείται με τον καθορισμό των ρυθμών μετάδοσης αυτής της μορφής ενέργειας είναι η *μετάδοση θερμότητας*.

Κάποιος θα αναρωτιέται γιατί χρειάζεται να μελετήσουμε τη μετάδοση θερμότητας αφού ο καθορισμός της ποσότητας της ενέργειας που απαιτείται να μεταδοθεί από ένα μέσο σε άλλο ή ακόμα και στο ίδιο είναι εφικτή μέσω της θερμοδυναμικής. Ο λόγος είναι ότι η ποσότητα της θερμότητας δεν είναι ικανή από μόνη της να μας απαντήσει στο ερώτημα για το <u>χρονικό διάστημα</u> που υπεισέρχεται μέχρι να μεταδοθεί ή ακόμα και με ποιόν τρόπο (μηχανισμό) μπορεί να γίνει αυτό.

ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ





Στην πράξη αυτό που μας αφορά είναι ο ρυθμός μετάδοσης της θερμότητας, δηλαδή η ποσότητα της μεταδιδόμενης θερμότητας στη μονάδα του χρόνου.

Η θερμοδυναμική **μπορεί να μας απαντήσει στο ερώτημα πόση είναι η ποσότητα της θερμότητας που μεταδίδεται από ένα ρευστό στο περιβάλλον του όταν η θερμοκρασία του ελαττωθεί κατά συγκεκριμένους βαθμούς. Επιπλέον** ***η θερμοδυναμική*** **εξετάζει μεταβολές συστημάτων από μια κατάσταση ισορροπίας σε μια άλλη κατάσταση ισορροπίας.**

Η μετάδοση θερμότητας **από την άλλη πλευρά εξετάζει μεταξύ των άλλων το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί για την ελάττωση της θερμοκρασίας ενός συστήματος αλλά και τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα σε καταστάσεις που δε βρίσκονται σε ισορροπία.**

Η μελέτη της ***μετάδοσης θερμότητας*** **δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί χωρίς τους βασικούς νόμους της** ***θερμοδυναμικής.***

ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Στην πράξη αυτό που μας αφορά είναι ο <u>ρυθμός</u> μετάδοσης της θερμότητας, δηλαδή <u>η ποσότητα της μεταδιδόμενης θερμότητας στη μονάδα του χρόνου</u>.

Η θερμοδυναμική **μπορεί να μας απαντήσει στο ερώτημα <u>πόση</u> είναι η ποσότητα της θερμότητας που μεταδίδεται από ένα ρευστό στο περιβάλλον του όταν η θερμοκρασία του ελαττωθεί κατά συγκεκριμένους βαθμούς. Επιπλέον** ***η θερμοδυναμική*** **εξετάζει μεταβολές συστημάτων από μια κατάσταση ισορροπίας σε μια άλλη κατάσταση ισορροπίας.**

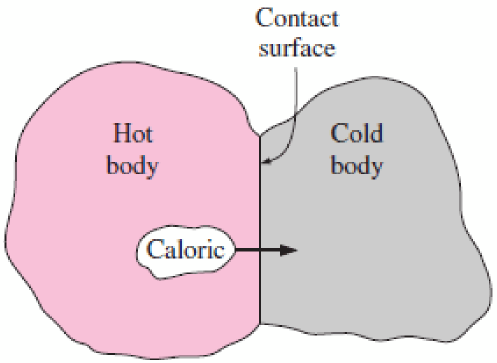
Η μετάδοση θερμότητας **από την άλλη πλευρά εξετάζει μεταξύ των άλλων το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί για την ελάττωση της θερμοκρασίας ενός συστήματος αλλά και τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα σε καταστάσεις που δε βρίσκονται σε ισορροπία.**

Η μελέτη της ***μετάδοσης θερμότητας*** **<u>δεν μπορεί</u> να πραγματοποιηθεί χωρίς τους βασικούς νόμους της** ***θερμοδυναμικής.***

ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Η θερμοδυναμική θεμελιώνεται με δύο νόμους:

Ο πρώτος νόμος της *θερμοδυναμικής* αναφέρει ότι ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας σε ένα σύστημα είναι ίσος με το ρυθμό αύξησης της ενέργειας του συστήματος. Πρόκειται για το νόμο που περιγράφει τη <u>διατήρηση της ενέργειας</u> ενός κλειστού συστήματος.



Ο δεύτερος νόμος της *θερμοδυναμικής* αναφέρει ότι η θερμότητα μεταδίδεται προς την κατεύθυνση υψηλότερης προς χαμηλότερη θερμοκρασία. Η αιτία της μετάδοσης της θερμότητας είναι η <u>διαφορά</u>, δηλαδή αποτελεί την αυτής. Ο ρυθμός μετάδοσης της θερμότητας από το πλάτος του θερμοκρασιακού (δηλαδή τη θερμοκρασιακή διαφορά). Όσο μεγαλύτερο είναι το θερμοκρασιακό δυναμικό τόσο μεγαλύτερος είναι και ο ρυθμός μετάδοσης της θερμότητας.

ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Οι συσκευές όπως εναλλάκτες θερμότητας, boilers, συμπυκνωτές, καλοριφέρ, θερμάστρες, radiators, φούρνοι, ψυγεία, θερμικοί συλλέκτες κ.α. σχεδιάζονται βασιζόμενες στην ανάλυση της μετάδοσης θερμότητας.

Τα προβλήματα τα οποία καλείται να λύσει ένας μηχανικός μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες:

1. Προβλήματα που αφορούν το <u>ρυθμό μετάδοσης θερμότητας</u> (rating problems). Σκοπός είναι ο καθορισμός του ρυθμού μετάδοσης της θερμότητας για δεδομένη διαφορά θερμοκρασίας.
2. Προβλήματα που αφορούν το <u>μέγεθος των συστημάτων μετάδοσης-μετατροπής της θερμικής ενέργειας</u> (sizing problems). Σκοπός είναι ο καθορισμός του μεγέθους των συστημάτων προκειμένου να επιτευχθεί συγκεκριμένος ρυθμός μετάδοσης θερμότητας για δεδομένη θερμοκρασιακή διαφορά.

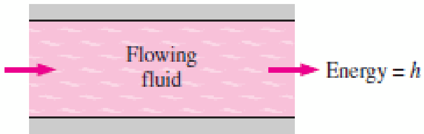
Η διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων μπορεί να είναι είτε πειραματική (μετρήσεις και διαδικασία τεστ) είτε αναλυτική (μέσω ανάλυσης και υπολογισμών).

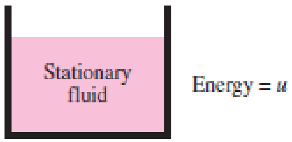
ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΑΛΛΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Η ***Ενέργεια*** μπορεί να υπάρξει σε διάφορες μορφές όπως ***θερμική, μηχανική, κινητική, δυναμική, ηλεκτρική, μαγνητική, χημική*** και ***πυρηνική***. Το άθροισμα όλων των παραπάνω αποτελεί την ***Ολική Ενέργεια Ε*** ενός συστήματος. Οι μορφές της ενέργειας που σχετίζονται με τη μοριακή δομή ενός συστήματος και του βαθμού της μοριακής δραστηριότητας αναφέρεται με τον όρο ***μικροσκοπική ενέργεια***. Το άθροισμα όλων των μικροσκοπικών μορφών ενέργειας καλείται ***εσωτερική ενέργεια*** του συστήματος και συμβολίζεται με ***U***. Η ***εσωτερική ενέργεια*** μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας των μορίων. Το ποσοστό της εσωτερικής ενέργειας που σχετίζεται με την κινητική ενέργεια των μορίων καλείται ***αισθητή ενέργεια*** ή ***αισθητή θερμότητα.*** Στην περίπτωση αυτή η μέση ταχύτητα των μορίων είναι ανάλογη της θερμοκρασίας. Ως εκ τούτου σε υψηλότερες θερμοκρασίες τα μόρια θα κινούνται σε υψηλότερη κινητική ενέργεια το αποτέλεσμα είναι ότι θα έχουν υψηλότερη εσωτερική ενέργεια. Η εσωτερική ενέργεια σχετίζεται με τις ενδομοριακές δυνάμεις μεταξύ των μορίων ενός συστήματος οι οποίες “δένουν” τα μόρια μεταξύ τους. Εάν ικανή ενέργεια μεταδοθεί στα μόρια ενός στερεού ή υγρού, αυτά θα σπάσουν τους δεσμούς μεταξύ τους και το σύστημα θα βρεθεί σε αέρια δομή. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται διαδικασία **αλλαγής φάσης** (**phase change**) και η εσωτερική ενέργεια του συστήματος είναι υψηλότερη εκείνης όταν βρισκόταν στην αρχική του φάση. Η εσωτερική ενέργεια που σχετίζεται με τη φάση στην οποία βρίσκεται ένα σύστημα καλείται ***Λανθάνουσα Ενέργεια*** ή ***Λανθάνουσα Θερμότητα***.

ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΑΛΛΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Οι παραπάνω μεταβολές μπορούν να συμβούν δίχως τη μεταβολή της χημικής σύστασης ενός συστήματος. Τα περισσότερα προβλήματα υπόκεινται σε αυτή την κατηγορία. Η ***εσωτερική ενέργεια*** που σχετίζεται με τους ατομικούς δεσμούς σε ένα μόριο καλείται ***χημική ενέργεια*** ή ***ενέργεια δεσμού***, ενώ η εσωτερική ενέργεια που σχετίζεται με τους δεσμούς στον πυρήνα ενός ατόμου καλείται ***πυρηνική ενέργεια***.





Στη μελέτη ενός συστήματος στη μορφή ρευστού συχνά λαμβάνονται υπόψη οι ποσότητες u και Pv. Το άθροισμα των δύο αυτών ποσοτήτων καλείται ***ενθαλπία*** h.

$$h = u + Pv$$

Ο όρος Pv αντιπροσωπεύει την ενέργεια ροής ενός ρευστού, η οποία είναι η ενέργεια που χρειάζεται ένα ρευστό προκειμένου να ρέει με δεδομένη ροή. Ενώ η εσωτερική ενέργεια u αντιπροσωπεύει τη μικροσκοπική ενέργεια ενός μη ρέοντος ρευστού.

Ειδικές Θερμότητες των Αερίων, Υγρών και Στερεών

Με τον όρο ειδική θερμότητα ορίζεται η ενέργεια που απαιτείται προκειμένου η θερμοκρασία μιας μοναδιαίας μάζας να ανέβει κατά ένα βαθμό. Γενικά αυτή η ενέργεια εξαρτάται με ποιόν τρόπο συμβαίνει αυτή η διαδικασία. Στη Θερμοδυναμική ενδιαφερόμαστε για δύο είδη ειδικών θερμοτήτων: την ειδική θερμότητα υπό σταθερό όγκο *Cv* και την ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση *Cp*. *Cp* > *Cv* γιατί σε σταθερή πίεση το σύστημα εκτονώνεται και το έργο εκτόνωσης πρέπει να προσφερθεί. Στα ιδανικά αέρια ισχύει: *Cp* = *Cv* + *R*, όπου *R* είναι η σταθερά των αερίων.

$$du = Cv \cdot dT \quad \text{και} \quad dh = Cp \cdot dT$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u = C_{v,\,\mathrm{ave}}\Delta T \qquad \text{and} \qquad \Delta h = C_{p,\,\mathrm{ave}}\Delta T \\ \\ \Delta U = mC_{v,\,\mathrm{ave}}\Delta T \qquad \text{and} \qquad \Delta H = mC_{p,\,\mathrm{ave}}\Delta T \end{array}\right\}$$

Μικρές μεταβολές που συμβαίνουν λαμβάνοντας υπόψη μέση τιμή θερμοκρασίας

$$\Delta U = mC_{\mathrm{ave}}\Delta T$$

Στην ασυμπίεστη ύλη *Cv* ≈ *Cp* ≈ *C*

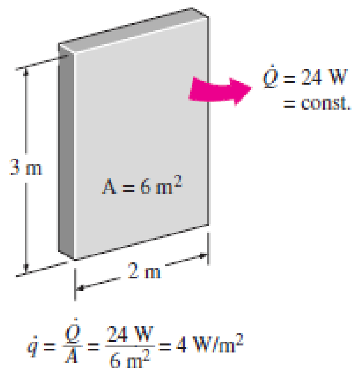
Μετάδοση Ενέργειας

Η ενέργεια μπορεί να μεταδοθεί από ή σε μια δεδομένη μάζα μέσω του *έργου W* και μέσω της *θερμότητας, Q*.

Η ποσότητα της θερμότητας που μεταδίδεται ανά μονάδα χρόνου καλείται *ρυθμός μετάδοσης της θερμότητας,* $\dot{Q}$

Ο κανονικός ρυθμός μετάδοσης της θερμότητας ανά μονάδα επιφάνειας καλείται *ροή Θερμότητας,* $\dot{q}$

$$Q = \int_0^{\Delta t} \dot{Q}\,dt \qquad Q = \dot{Q}\Delta t \qquad \dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A}$$



Ο Πρώτος Νόμος της Θερμοδυναμικής

Ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής είναι γνωστός και ως ***αρχή διατήρησης της ενέργειας***: <u>Η Ενέργεια δεν μπορεί μόνο να δημιουργείται ή μόνο να καταστρέφεται, μπορεί μόνο να αλλάζει μορφές.</u>

Η μεταβολή της ολικής ενέργειας ενός συστήματος στη διάρκεια μιας διαδικασίας είναι ίσος με τη διαφορά μεταξύ της ολικής ενέργειας που προφέρεται στο σύστημα χ

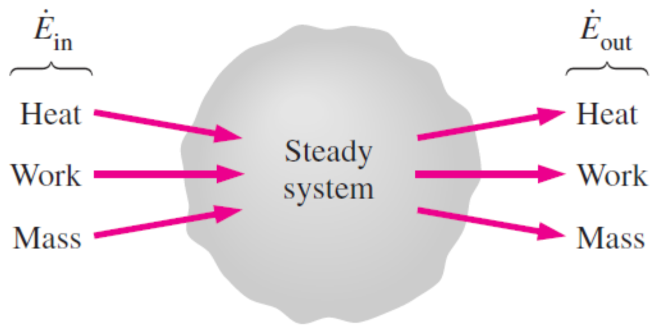
$$\begin{pmatrix}\text{Total energy}\\ \text{entering the}\\ \text{system}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Total energy}\\ \text{leaving the}\\ \text{system}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Change in the}\\ \text{total energy of}\\ \text{the system}\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{E_{in} - E_{out}}_{\substack{\text{Net energy transfer}\\ \text{by heat, work, and mass}}} = \underbrace{\Delta E_{system}}_{\substack{\text{Change in internal, kinetic,}\\ \text{potential, etc., energies}}}$$

or, in the **rate form,** as

$$\underbrace{\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out}}_{\substack{\text{Rate of net energy transfer}\\ \text{by heat, work, and mass}}} = \underbrace{dE_{system}/dt}_{\substack{\text{Rate of change in internal}\\ \text{kinetic, potential, etc., energies}}}$$

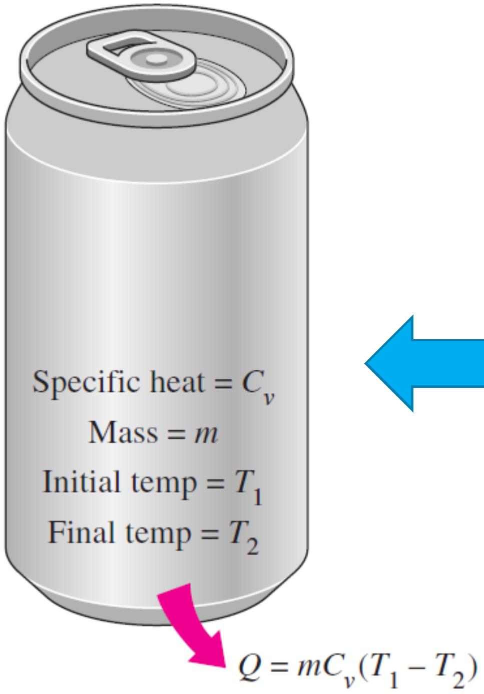
$$\underbrace{Q_{in} - Q_{out}}_{\substack{\text{Net heat}\\ \text{transfer}}} + \underbrace{E_{gen}}_{\substack{\text{Heat}\\ \text{generation}}} = \underbrace{\Delta E_{\text{thermal, system}}}_{\substack{\text{Change in thermal}\\ \text{energy of the system}}}$$



$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out}$$

$$\underbrace{\dot{E}_{in}}_{\substack{\text{Rate of net energy transfer in}\\ \text{by heat, work, and mass}}} = \underbrace{\dot{E}_{out}}_{\substack{\text{Rate of net energy transfer out}\\ \text{by heat, work, and mass}}}$$

Ισοζύγιο Ενέργειας για Κλειστά Συστήματα (Σταθερή Μάζα)



Στάσιμο κλειστό σύστημα:

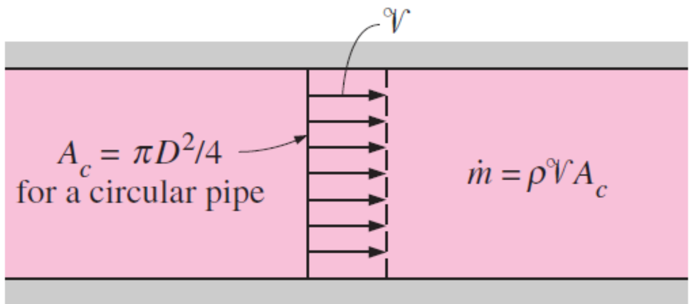
$$E_{in} - E_{out} = \Delta U = mC_v\Delta T \qquad \text{(J)}$$

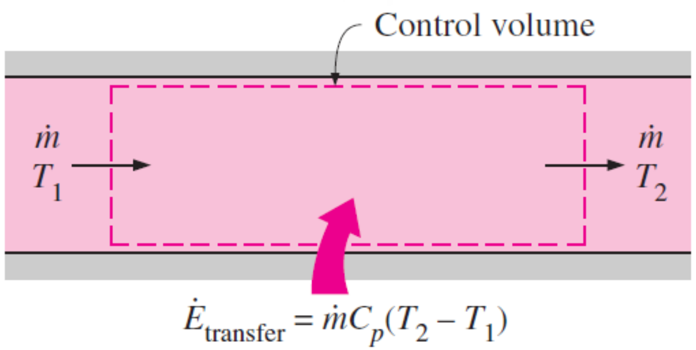
Στάσιμο κλειστό σύστημα, χωρίς έργο:

$$\boxed{Q = mC_v\Delta T \qquad \text{(J)}}$$

Η σχέση αυτή ισχύει όταν η μάζα του συστήματος είναι σταθερή και δε μεταβάλλεται ο όγκος που καταλαμβάνει

Ισοζύγιο Ενέργειας για Συστήματα Μόνιμης Σταθεροποιημένης Ροής





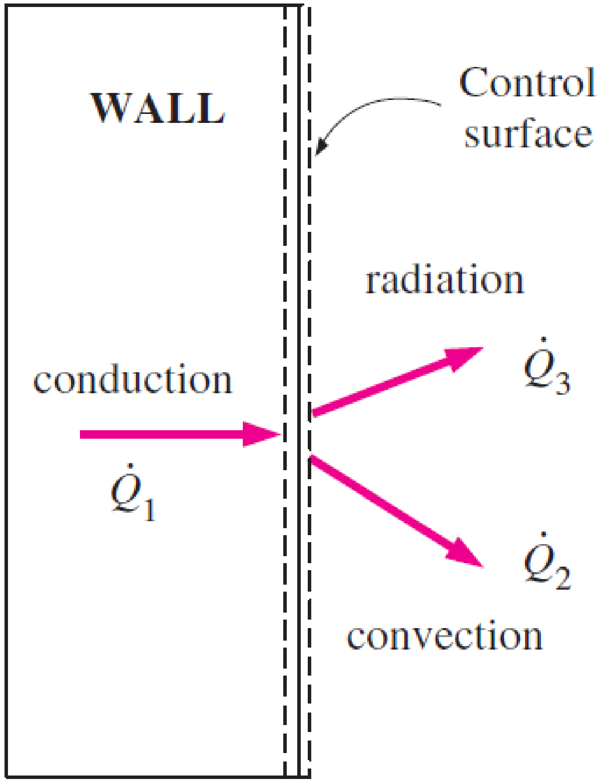
Η ποσότητα της Ενέργειας που εισέρχεται σε έναν όγκο ελέγχου με κάθε μορφή (θερμότητα, έργο, μεταφορά μάζας) για μια διεργασία μόνιμης ροής θα πρέπει να ισούται με την ποσότητα της Ενέργειας που εξέρχεται από αυτή.

$$\dot{m} = \rho \mathcal{V} A_c \qquad \text{(kg/s)}$$

$$\dot{V} = \mathcal{V} A_c = \frac{\dot{m}}{\rho} \qquad \text{(m}^3\text{/s)}$$

$$\boxed{\dot{Q} = \dot{m}\,\Delta h = \dot{m}\,C_p \Delta T \qquad \text{(kJ/s)}}$$

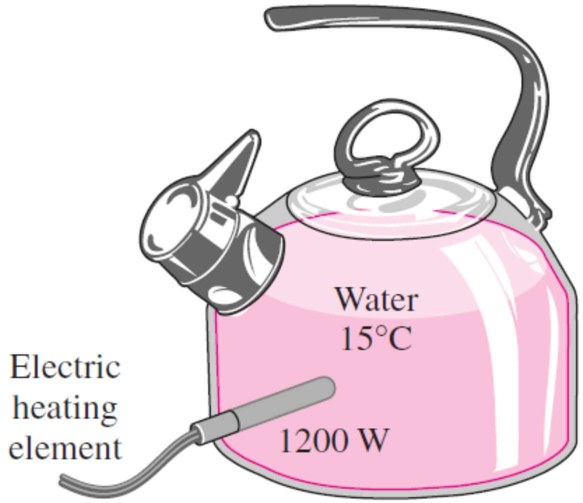
Ισοζύγιο Ενέργειας σε μία Επιφάνεια



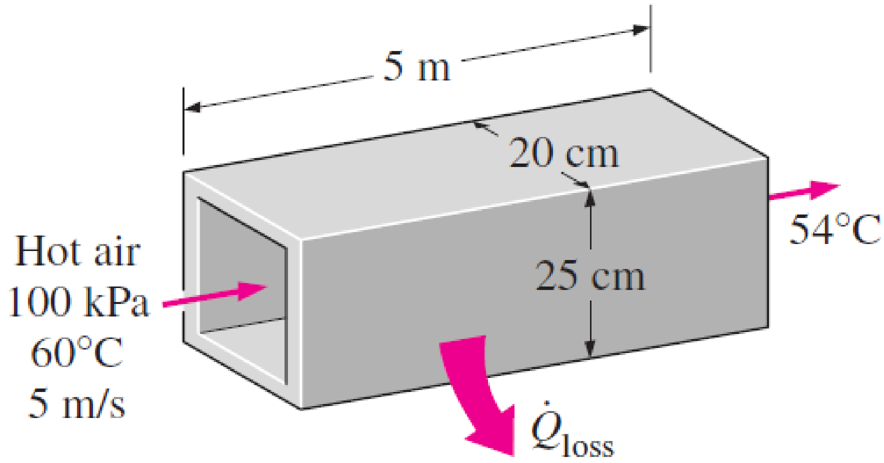
Η ποσότητα της θερμότητας που εισέρχεται σε μία επιφάνεια ελέγχου θα πρέπει να ισούται με την ποσότητα της θερμότητας που εξέρχεται από αυτή.

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3$$

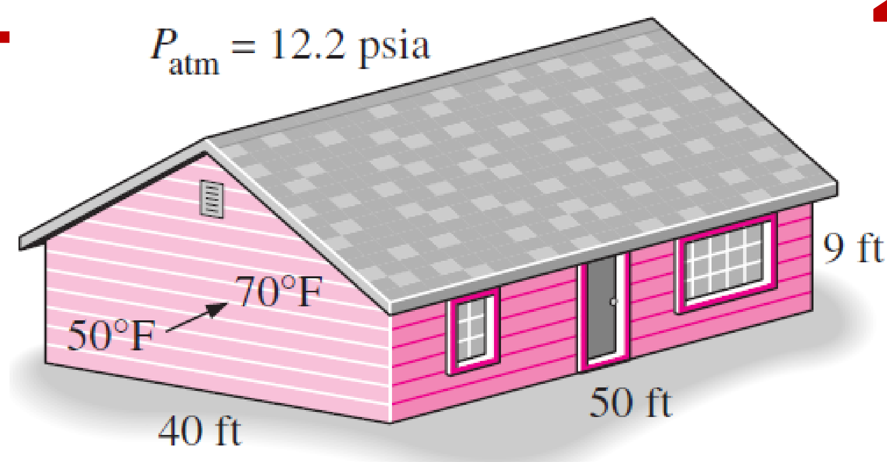
Παραδείγματα



1



2



3

Αγωγή (Conduction)

Η θερμότητα **ορίζεται ως η μορφή της ενέργειας όπως μεταδίδεται από ένα σύστημα σε ένα άλλο ως αποτέλεσμα της διαφοράς θερμοκρασίας. Οι μηχανισμοί μέσω των οποίων πραγματοποιείται η μετάδοση της θερμότητας αποτελεί το αντικείμενο της μελέτης μας.**

Ο πρώτος μηχανισμός που λαμβάνει χώρα στη μετάδοση θερμότητας ονομάζεται *αγωγή (conduction)*. Σύμφωνα με τον μηχανισμό αυτόν η θερμότητα μεταδίδεται από τα σωματίδια της ύλης που παρουσιάζουν υψηλότερη εσωτερική ενέργεια προς αυτά με τη χαμηλότερη. Ο μηχανισμός αυτός λαμβάνει χώρα στα υγρά, αέρια και στερεά. Τόσο στα υγρά όσο και στα αέρια η αγωγή είναι αποτέλεσμα συγκρούσεων και διαχύσεων των σωματιδίων κατά την τυχαία κίνησή τους. Στα στερεά ο μηχανισμός αυτός οφείλει την ύπαρξή του στις συνδυασμένες ταλαντώσεις των μορίων ενώ η ενέργεια μεταδίδεται μέσω των ελευθέρων ηλεκτρονίων.

Ο ρυθμός μετάδοσης της θερμότητας εξαρτάται από τη *γεωμετρία* του μέσου, του *πάχους* αυτού, του *είδους του μέσου (υλικού)* καθώς και της *διαφοράς της θερμοκρασίας* κατά μήκος αυτού.

$$\text{Ρυθμός} \propto \frac{(\text{Επιφάνεια})\times(\text{Διαφορά Θερμοκρασίας})}{\text{Πάχος}}$$

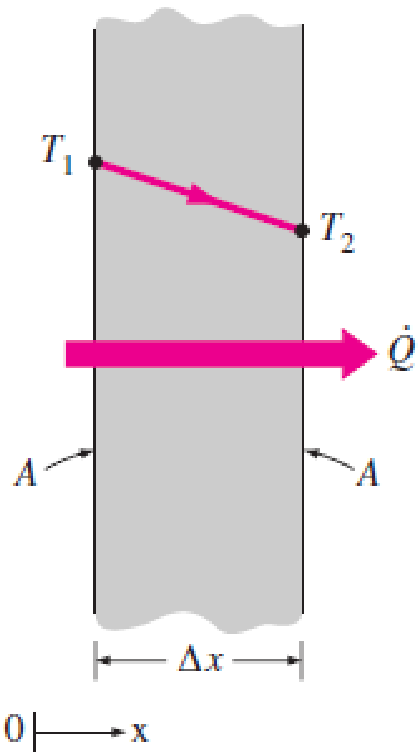
Αγωγή (Conduction)

$$\dot{Q}_{\text{cond}} = kA\frac{T_1 - T_2}{\Delta x} = -kA\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Η σταθερά k ονομάζεται ***συντελεστής αγωγιμότητας*** ή ***θερμική αγωγιμότητα*** και χαρακτηρίζει το υλικό. Πρακτικά μεταφράζεται ως η δυνατότητα που παρουσιάζει το υλικό να μεταδίδεται η θερμότητα μέσω του μηχανισμού της αγωγής.

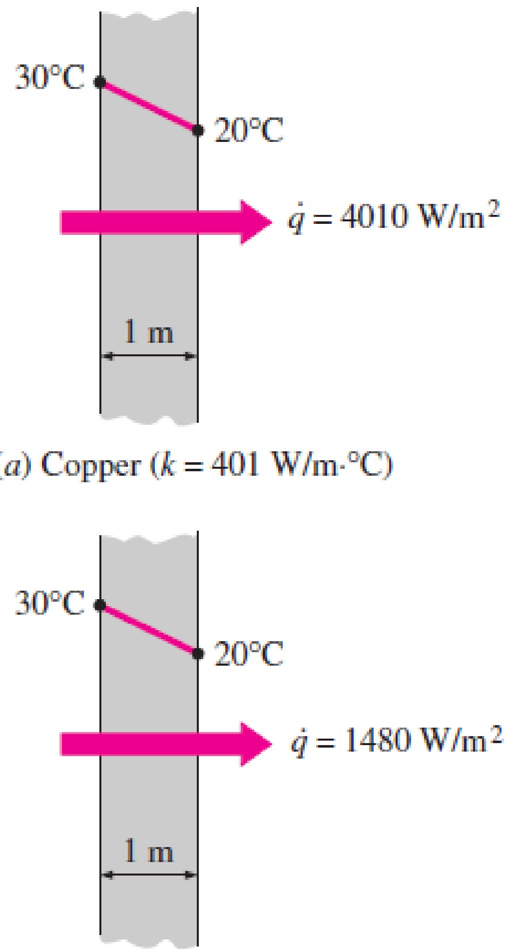
$$\dot{Q}_{\text{cond}} = -kA\frac{dT}{dx}$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή και ως:
Νόμος του Fourier για την αγωγή της θερμότητας



Αγωγή (Conduction)

Πόσο πρέπει να είναι το πάχος του τοίχου από χαλκό ώστε ο ρυθμός θερμότητας να ταυτιστεί με αυτόν που παρουσιάζεται στον τοίχο από πυρίτιο?



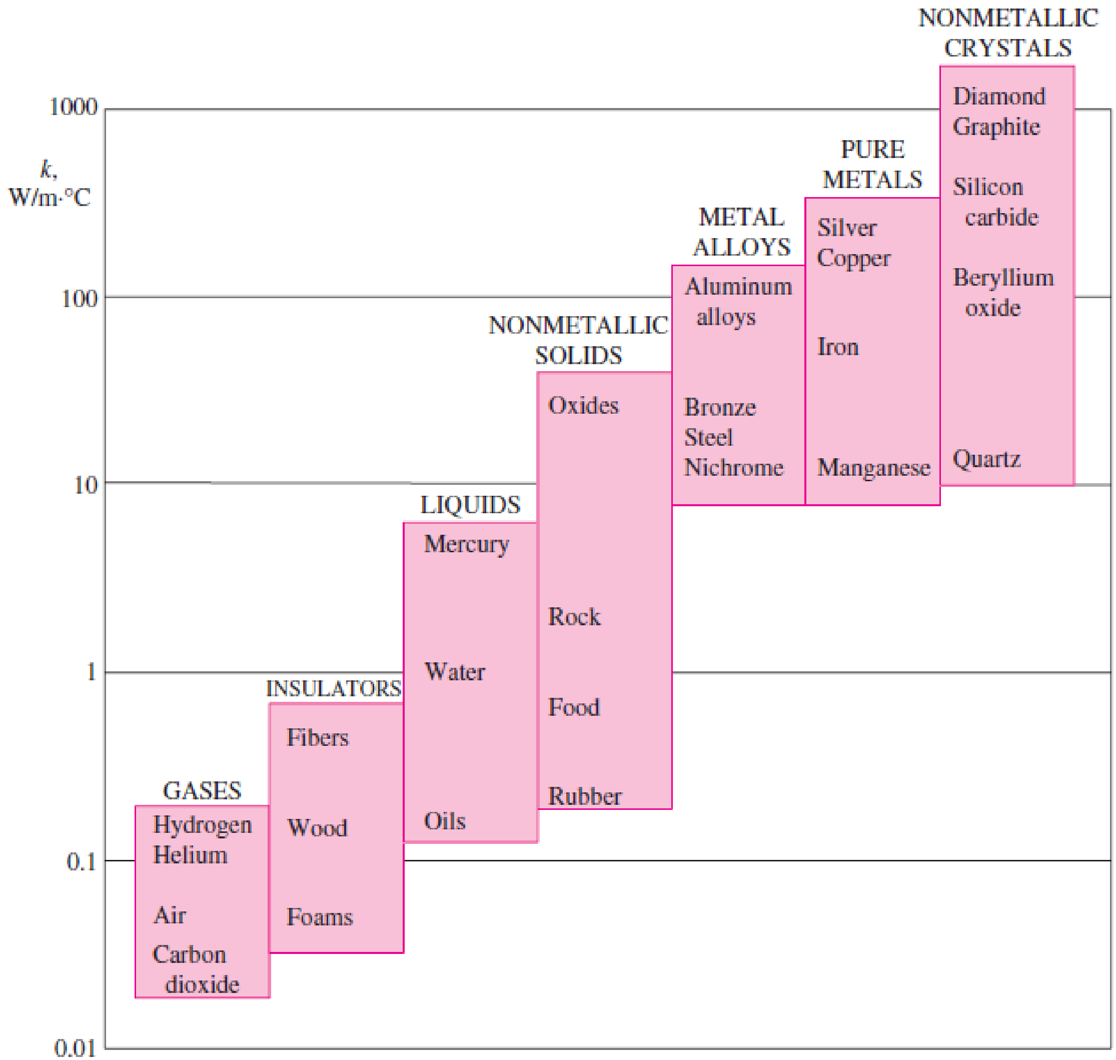
(*a*) Copper (*k* = 401 W/m·°C)

(*b*) Silicon (*k* = 148 W/m·°C)

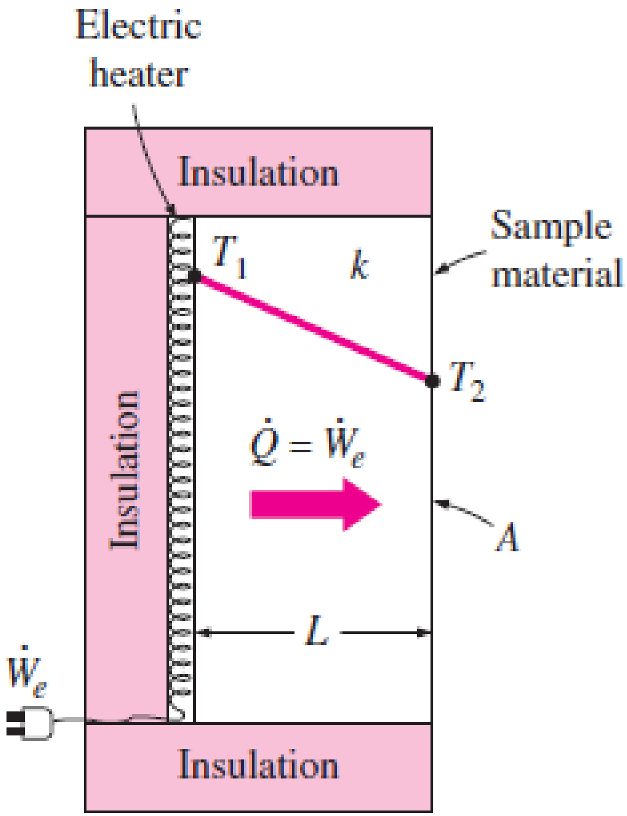
Αγωγή (Conduction)

Θερμική Αγωγιμότητα:

Ρυθμός μετάδοσης της θερμότητας διαμέσου μοναδιαίου πάχους ανά επιφάνεια και ανά μονάδα διαφοράς θερμοκρασίας

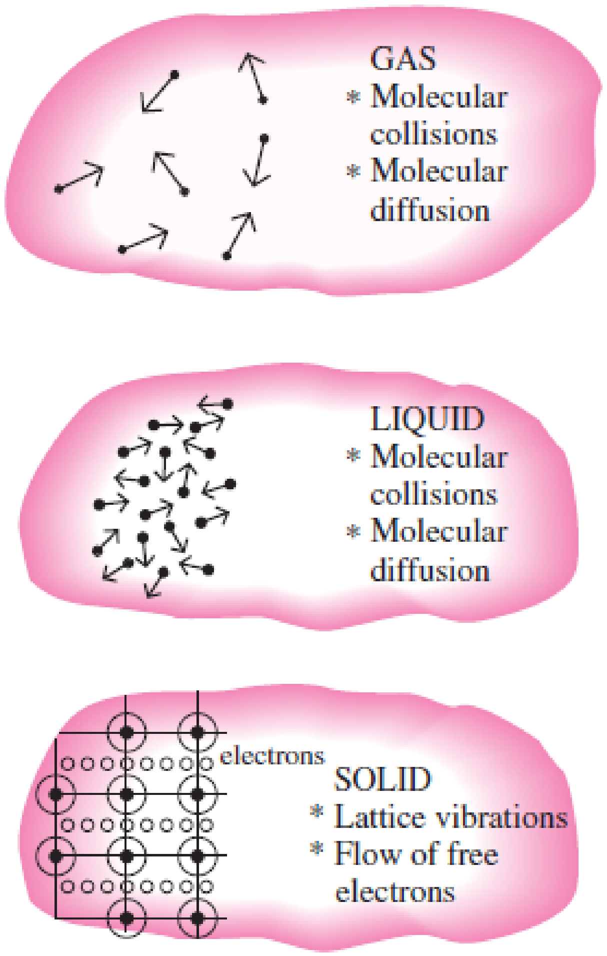


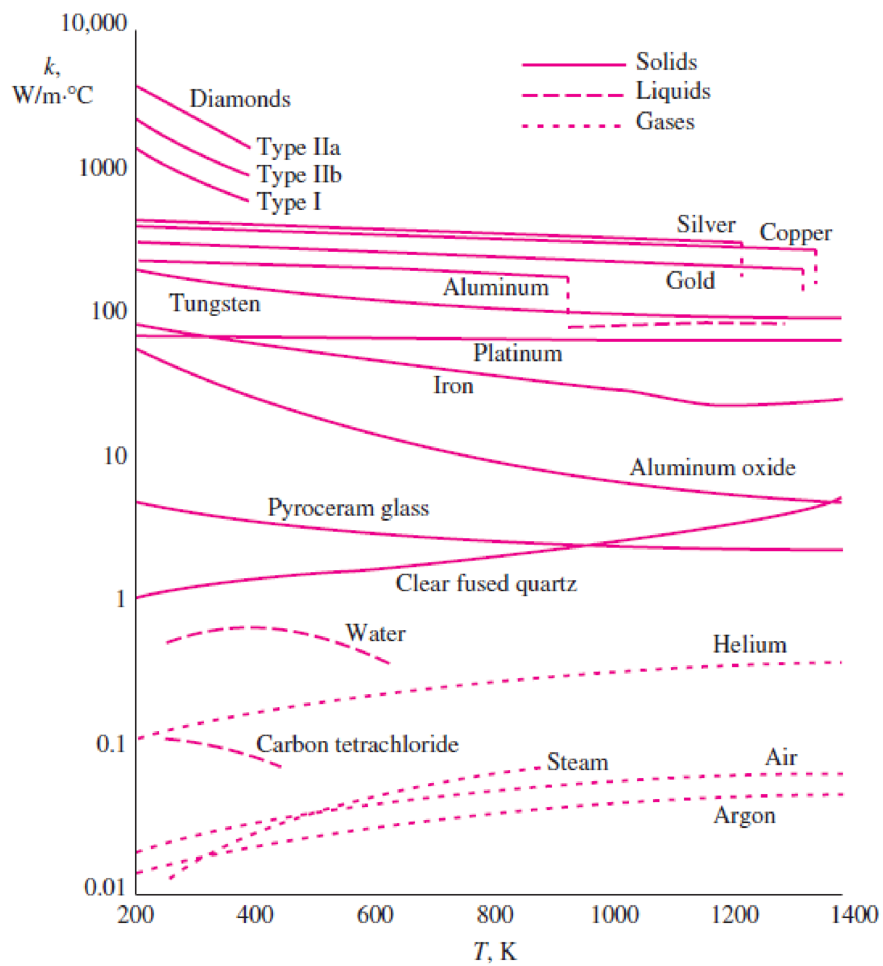
Αγωγή (Conduction)



Να εξαχθεί η μαθηματική σχέση για τον προσδιορισμό της θερμικής αγωγιμότητας, *k* τυχαίου δείγματος.

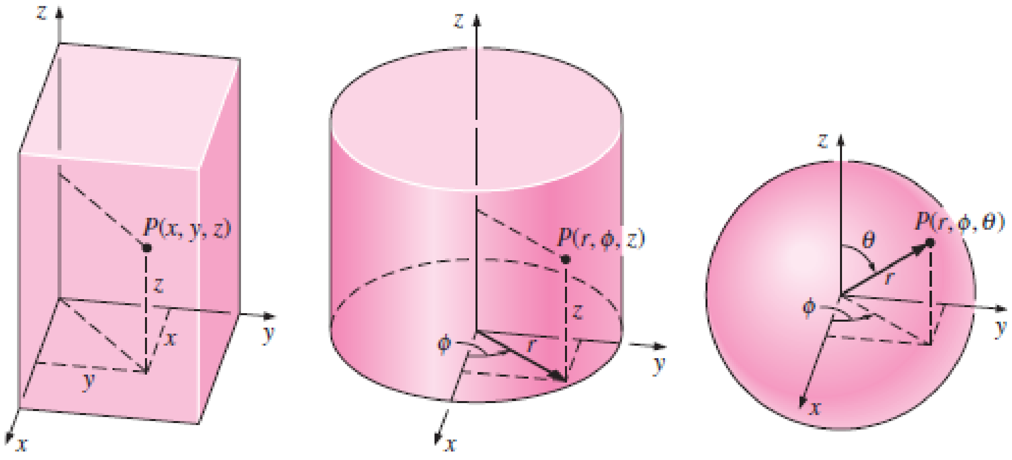
Αγωγή (Conduction)



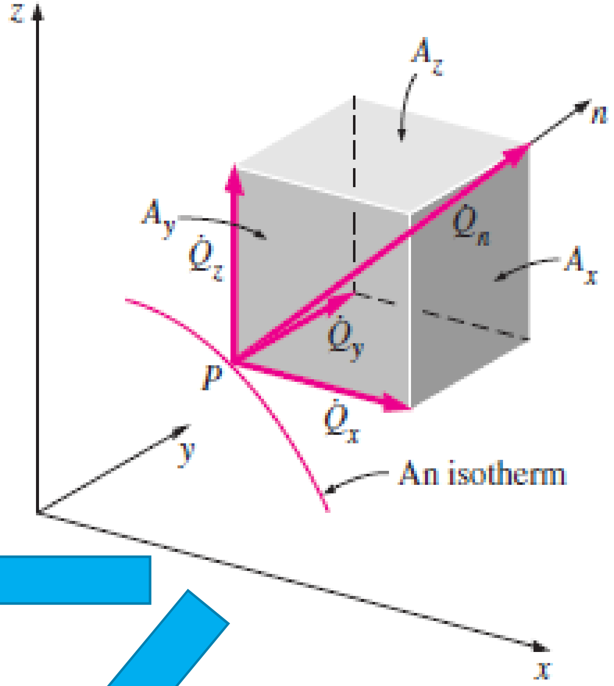


Αγωγή (Conduction)

$$\dot{Q}_n = -kA\frac{\partial T}{\partial n}$$



(*a*) Rectangular coordinates (*b*) Cylindrical coordinates (*c*) Spherical coordinates



$$\vec{\dot{Q}}_n = \dot{Q}_x \vec{i} + \dot{Q}_y \vec{j} + \dot{Q}_z \vec{k}$$

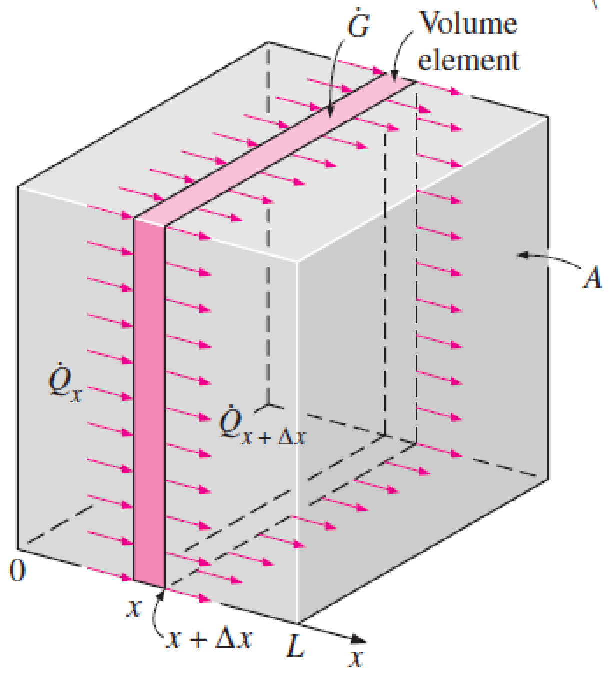
$$\dot{Q}_x = -kA_x\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad \dot{Q}_y = -kA_y\frac{\partial T}{\partial y}, \qquad \text{and} \qquad \dot{Q}_z = -kA_z\frac{\partial T}{\partial z}$$

Αγωγή (Conduction)

Παραγωγή Θερμότητας

$$\dot{G} = \int_V \dot{g}\, dV$$

$$\begin{pmatrix}\text{Rate of heat}\\ \text{conduction}\\ \text{at } x\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Rate of heat}\\ \text{conduction}\\ \text{at } x + \Delta x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Rate of heat}\\ \text{generation}\\ \text{inside the}\\ \text{element}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Rate of change}\\ \text{of the energy}\\ \text{content of the}\\ \text{element}\end{pmatrix}$$



$$A_x = A_{x+\Delta x} = A$$

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{G}_{\text{element}} = \frac{\Delta E_{\text{element}}}{\Delta t}$$

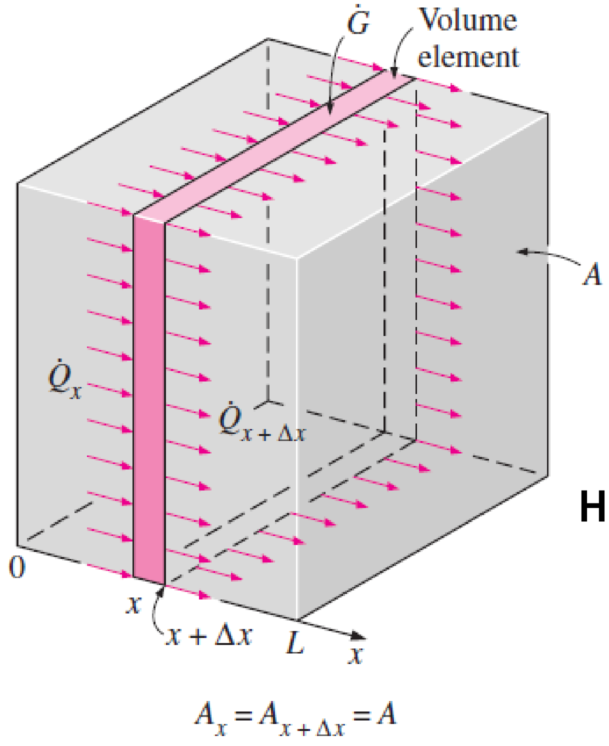
$$\Delta E_{\text{element}} = E_{t+\Delta t} - E_t = mC(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho C A \Delta x (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

$$\dot{G}_{\text{element}} = \dot{g} V_{\text{element}} = \dot{g} A \Delta x$$

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{g} A \Delta x = \rho C A \Delta x \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

$$-\frac{1}{A}\frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} + \dot{g} = \rho C \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Αγωγή (Conduction)



$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(kA\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{g} = \rho C\frac{\partial T}{\partial t}$$

όπου

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-kA\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

Variable conductivity: $$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{g} = \rho C\frac{\partial T}{\partial t}$$

Constant conductivity: $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Η μεταβλητή α ονομάζεται θερμική διαχυτότητα

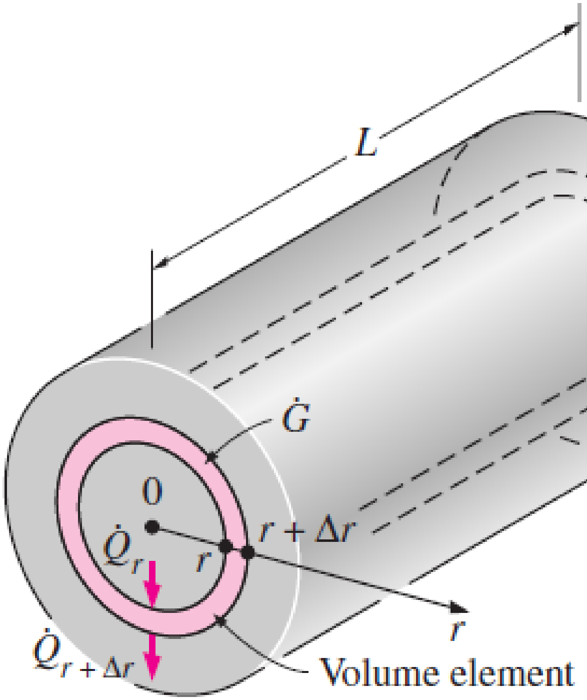
$$\alpha = k/\rho C$$

(1) *Steady-state:* $(\partial/\partial t = 0)$ $$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

(2) *Transient, no heat generation:* $(\dot{g} = 0)$ $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

(3) *Steady-state, no heat generation:* $(\partial/\partial t = 0 \text{ and } \dot{g} = 0)$ $$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

$$\begin{pmatrix}\text{Rate of heat}\\ \text{conduction}\\ \text{at } r\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Rate of heat}\\ \text{conduction}\\ \text{at } r+\Delta r\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Rate of heat}\\ \text{generation}\\ \text{inside the}\\ \text{element}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Rate of change}\\ \text{of the energy}\\ \text{content of the}\\ \text{element}\end{pmatrix}$$



$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} + \dot{G}_{\text{element}} = \frac{\Delta E_{\text{element}}}{\Delta t}$$

$$\Delta E_{\text{element}} = E_{t+\Delta t} - E_t = mC(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho C A \Delta r (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

$$\dot{G}_{\text{element}} = \dot{g} V_{\text{element}} = \dot{g} A \Delta r$$

$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} + \dot{g} A \Delta r = \rho C A \Delta r \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

$$-\frac{1}{A}\frac{\dot{Q}_{r+\Delta r} - \dot{Q}_r}{\Delta r} + \dot{g} = \rho C \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\dot{Q}_{r+\Delta r} - \dot{Q}_r}{\Delta r} = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-kA\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

$$A = 2\pi r L.$$

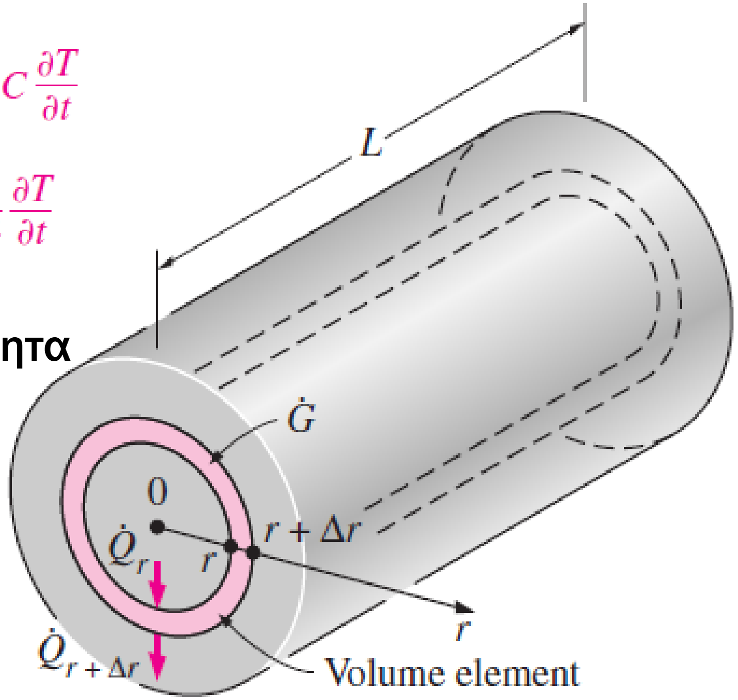
$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial r}\left(kA\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Variable conductivity: $$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\dot{g}=\rho C\frac{\partial T}{\partial t}$$

Constant conductivity: $$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\dot{g}}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Η μεταβλητή α ονομάζεται θερμική διαχυτότητα

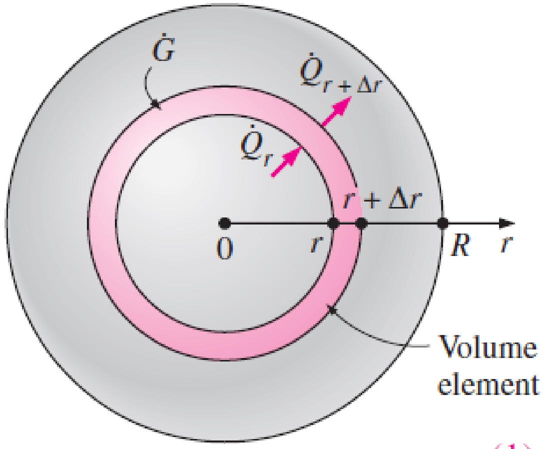
$$\alpha = k/\rho C$$



(1) *Steady-state:* $(\partial/\partial t = 0)$ $$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\frac{\dot{g}}{k}=0$$

(2) *Transient, no heat generation:* $(\dot{g} = 0)$ $$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

(3) *Steady-state, no heat generation:* $(\partial/\partial t = 0$ and $\dot{g} = 0)$ $$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0$$



$$A = 4\pi r^2$$

Variable conductivity: $$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 k \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Constant conductivity: $$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\alpha = k/\rho C$$

(1) *Steady-state:* ($\partial/\partial t = 0$) $$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

(2) *Transient, no heat generation:* ($\dot{g} = 0$) $$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

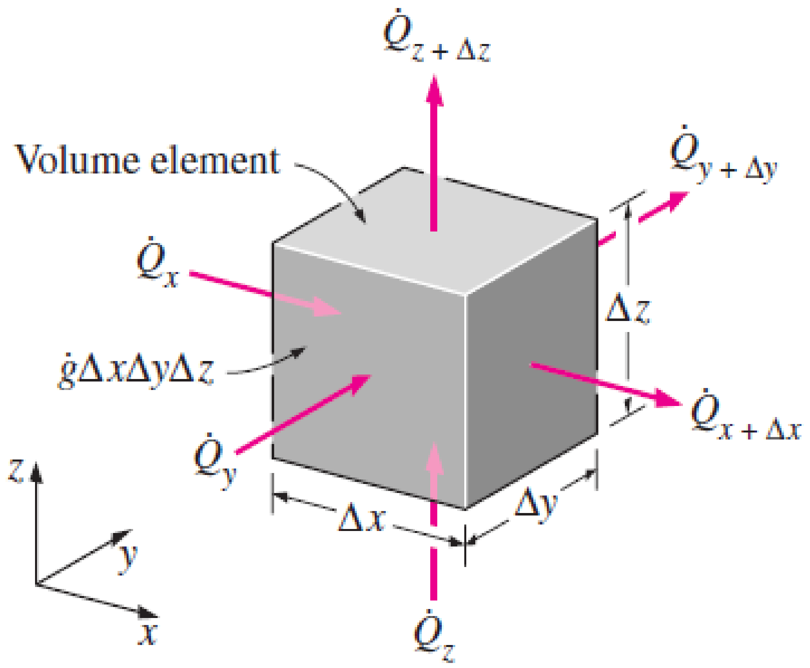
(3) *Steady-state, no heat generation:* ($\partial/\partial t = 0$ and $\dot{g} = 0$) $$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = 0 \quad \text{or} \quad r\frac{d^2T}{dr^2} + 2\frac{dT}{dr} = 0$$

$$\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n k \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

n=0: Επίπεδος τοίχος
n=1: Κύλινδρος
n=2: Σφαίρα

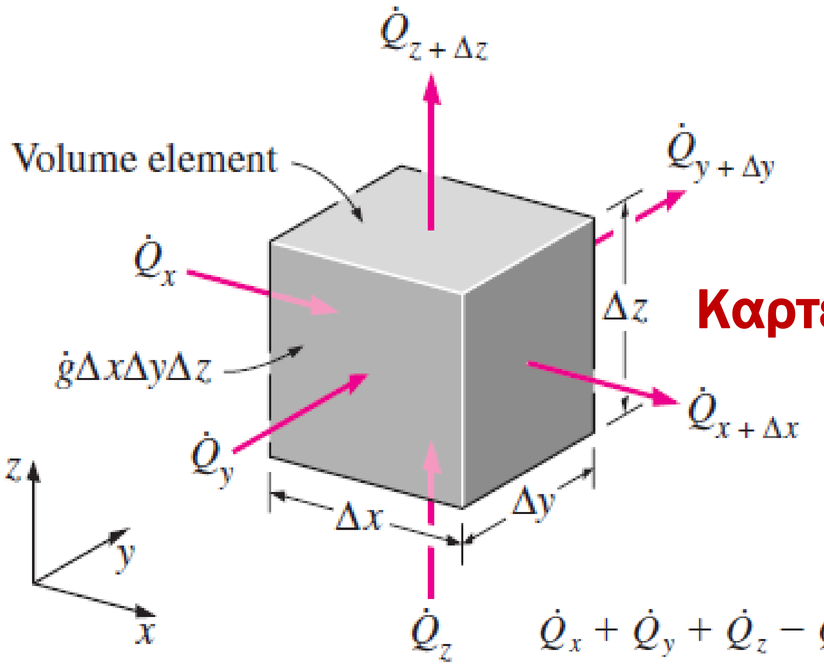
ΓΕΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΑΓΩΓΗΣ

Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων



$$\begin{pmatrix}\text{Rate of heat}\\ \text{conduction at}\\ x,\ y,\text{ and } z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Rate of heat}\\ \text{conduction}\\ \text{at } x+\Delta x,\\ y+\Delta y, \text{ and } z+\Delta z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Rate of heat}\\ \text{generation}\\ \text{inside the}\\ \text{element}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Rate of change}\\ \text{of the energy}\\ \text{content of}\\ \text{the element}\end{pmatrix}$$

Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων



$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{G}_{\text{element}} = \frac{\Delta E_{\text{element}}}{\Delta t}$$

$$\Delta E_{\text{element}} = E_{t+\Delta t} - E_t = mC(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho C \Delta x \Delta y \Delta z (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

$$\dot{G}_{\text{element}} = \dot{g} V_{\text{element}} = \dot{g}\Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{g}\Delta x \Delta y \Delta z = \rho C \Delta x \Delta y \Delta z \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Dividing by $\Delta x \Delta y \Delta z$ gives

$$-\frac{1}{\Delta y \Delta z}\frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta x \Delta z}\frac{\dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_y}{\Delta y} - \frac{1}{\Delta x \Delta y}\frac{\dot{Q}_{z+\Delta z} - \dot{Q}_z}{\Delta z} + \dot{g} = \rho C \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων

$$A_x = \Delta y \Delta z,\ A_y = \Delta x \Delta z, \text{ and } A_z = \Delta x \Delta y,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\partial}{\partial x}\left(-k \Delta y \Delta z \frac{\partial T}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_y}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\partial}{\partial y}\left(-k \Delta x \Delta z \frac{\partial T}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\dot{Q}_{z+\Delta z} - \dot{Q}_z}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\partial Q_z}{\partial z} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\partial}{\partial z}\left(-k \Delta x \Delta y \frac{\partial T}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

(1) *Steady-state:*
(called the **Poisson equation**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

(2) *Transient, no heat generation:*
(called the **diffusion equation**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

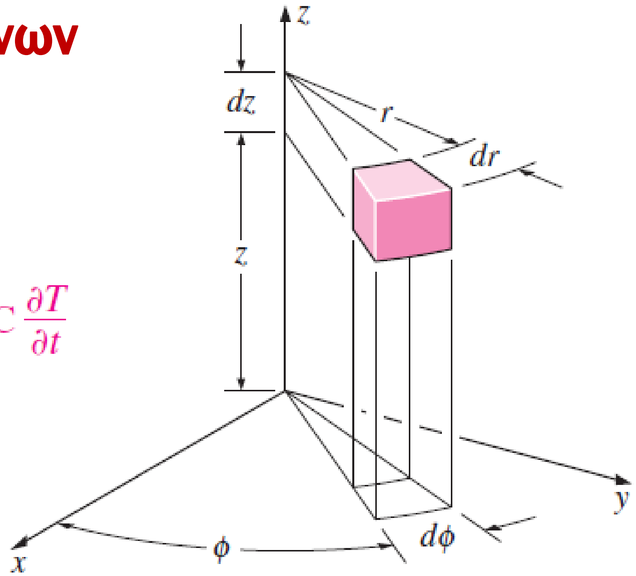
(3) *Steady-state, no heat generation:*
(called the **Laplace equation**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Κυλινδρικό Σύστημα Συντεταγμένων

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi, \qquad \text{and} \qquad z = z$$

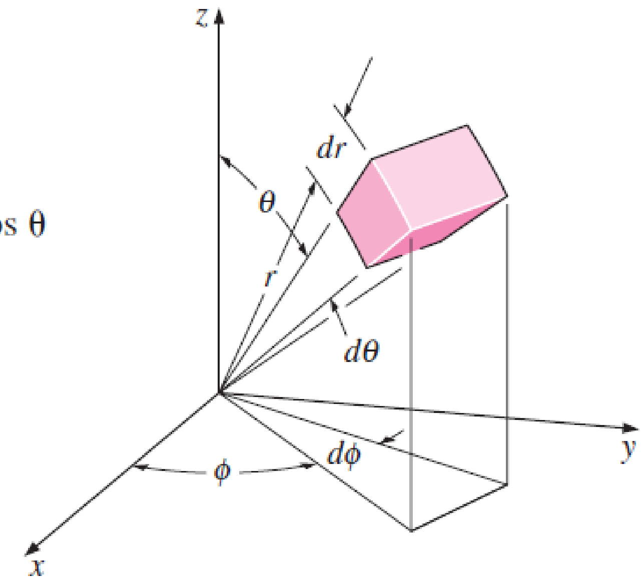
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(kr\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{g} = \rho C\frac{\partial T}{\partial t}$$



Εξαγωγή της βασικής Εξίσωσης

Σφαιρικό Σύστημα Συντεταγμένων

$$x = r\cos\phi\sin\theta, \qquad y = r\sin\phi\sin\theta, \qquad \text{and} \qquad z = \cos\theta$$

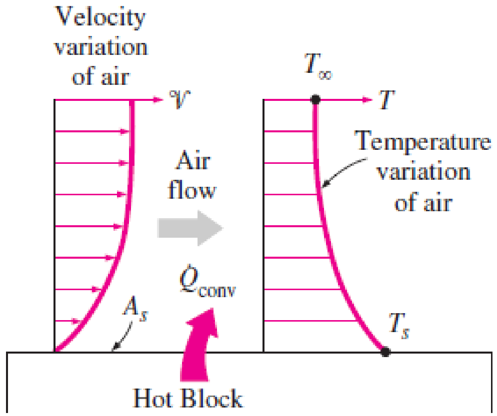


Εξαγωγή της βασικής Εξίσωσης

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \dot{g} = \rho C\frac{\partial T}{\partial t}$$

Συναγωγή (Convection)

Η Συναγωγή (Convection) είναι ο μηχανισμός μετάδοσης της θερμότητας που συναντάται στην οριακή επιφάνεια μεταξύ ενός στερεού επιφάνειας και ενός υγρού ή αερίου που βρίσκεται σε κίνηση. Ο μηχανισμός αυτός είναι αποτέλεσμα τόσο του μηχανισμού της αγωγής αλλά και της κίνησης μαζών του ρευστού που περιβάλλει το στερεό. Όσο μεγαλύτερη είναι ταχύτητα της κίνησης του ρευστού τόσο ο μηχανισμός της συναγωγής λαμβάνει χώρα εντονότερα.



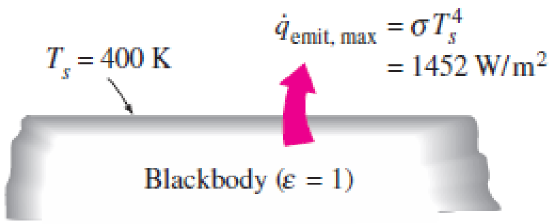
Η Συναγωγή μπορεί να παρουσιάζεται με τη μορφή ***βεβιασμένης συναγωγής*** ή ***φυσικής ή ελεύθερης συναγωγής*** ανάλογα με το αν το ρευστό κινείται με τη βοήθεια εξωτερικών δυνάμεων ή ελεύθερης κίνησης, αντίστοιχα. Ανεξάρτητα με την πολυπλοκότητα της διαδικασίας αυτού του μηχανισμού, η μετάδοση θερμότητας πραγματοποιείται κάθετα στη διεύθυνση της θερμοκρασιακής διαφοράς <u>(αιτία μετάδοσης θερμότητας)</u> και καθορίζεται μέσω του **νόμου του Newton για τη μετάδοση θερμότητας:**

$$\dot{Q}_{conv} = hA_s(T_s - T_\infty)$$

Όπου *h* καλείται συντελεστής μετάδοσης θερμότητας μέσω συναγωγής

Ακτινοβολία (Radiation)

Η Ακτινοβολία (Radiation) είναι ο μηχανισμός μετάδοσης της θερμότητας εκπέμπεται από την ύλη με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (ή φωτονίων) ως αποτέλεσμα των αλλαγών της ηλεκτρονικής δομής των ατόμων και των μορίων.

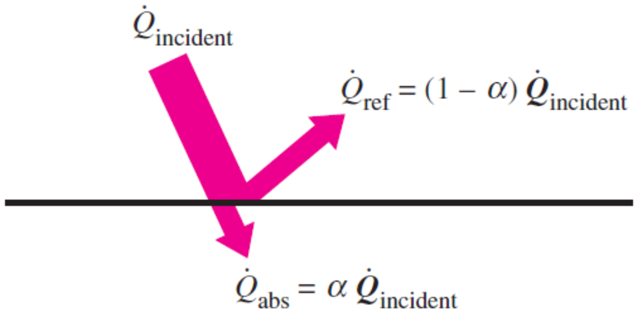


Στην ***Ακτινοβολία (Radiation)*** θεωρούμε ότι ο μηχανισμός λαμβάνει χώρα στην επιφάνεια των στερεών, υγρών ή αερίων. Ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης θερμότητας εκπέμπεται από μια επιφάνεια απόλυτης θερμοκρασίας εκφράζεται μέσω του νόμου των ***Stefan-Boltzman:***

$$\dot{Q}_{\text{emit, max}} = \sigma A_s T_s^4 \qquad \sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

$$\dot{Q}_{\text{emit}} = \varepsilon \sigma A_s T_s^4$$

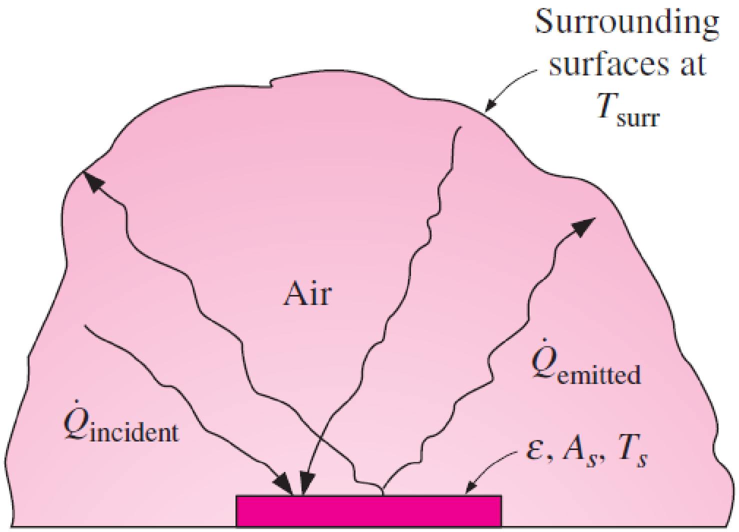
όπου ε καλείται εκπεμψιμότητα της επιφάνειας και οι τιμές της κυμαίνονται μεταξύ 0 και 1.



$$\dot{Q}_{\text{absorbed}} = \alpha \dot{Q}_{\text{incident}}$$

όπου α καλείται απορροφητικότητα της επιφάνειας και οι τιμές της κυμαίνονται μεταξύ 0 και 1.

Ακτινοβολία (Radiation)



$$\dot{Q}_{rad} = \varepsilon\sigma A_s(T_s^4 - T_{surr}^4)$$

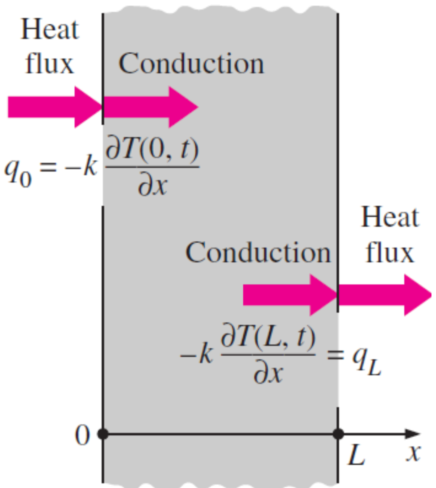
$$\dot{Q}_{rad} = \varepsilon\sigma A_s\,(T_s^4 - T_{surr}^4)$$

Συχνά ορίζουμε τον συνδυασμένο συντελεστή μετάδοσης θερμότητας ο οποίος περιγράφει τόσο τον μηχανισμό της ακτινοβολίας όσο και αυτόν της συναγωγής. Στην περίπτωση αυτή ο συνολικός ρυθμός μετάδοσης θερμότητας προς ή από μια επιφάνεια μέσω συναγωγής και ακτινοβολίας εκφράζεται μέσω της σχέσης:

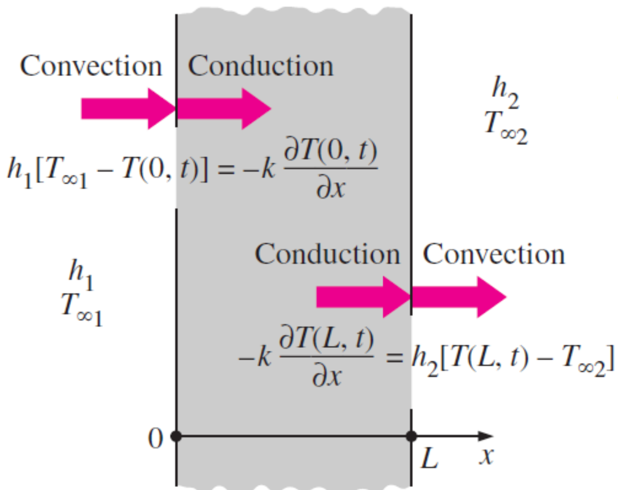
$$\dot{Q}_{total} = h_{combined}\,A_s\,(T_s - T_\infty)$$

Συνοριακές και Αρχικές Συνθήκες

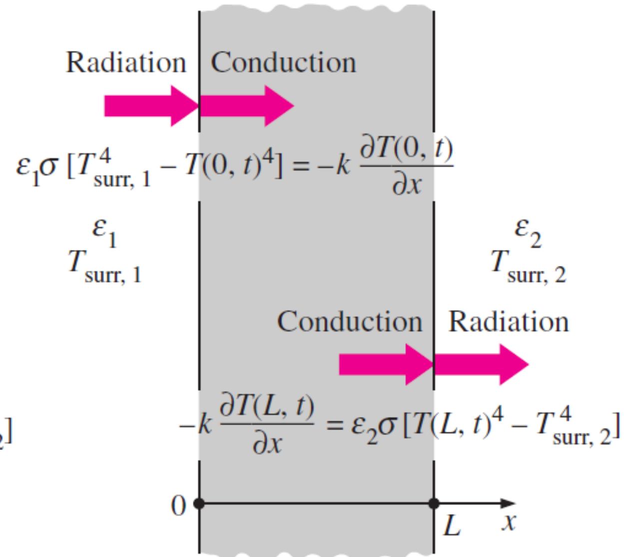
Με τον όρο Συνοριακές Συνθήκες ενός προβλήματος καλούμε τις μαθηματικές εκφράσεις των συνθηκών θέρμανσης στις οριακές επιφάνειες. Αρχικές συνθήκες καλούμε τις αντίστοιχες μαθηματικές εκφράσεις για τις καταστάσεις μετάδοσης θερμότητας στις αρχικές χρονικές στιγμές του προβλήματος. Ο συνδυασμός των νόμων που εκφράζουν τους μηχανισμούς μετάδοσης θερμότητας σε συνδυασμό με τις συνοριακές και αρχικές συνθήκες του προβλήματος, αποτελούν τα μαθηματικά εργαλεία για την επίλυσή του.



A



B

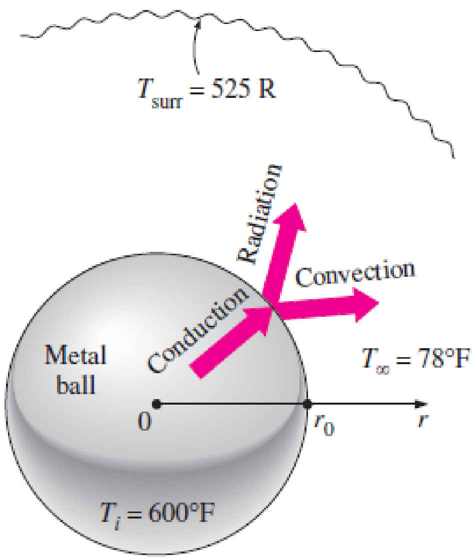


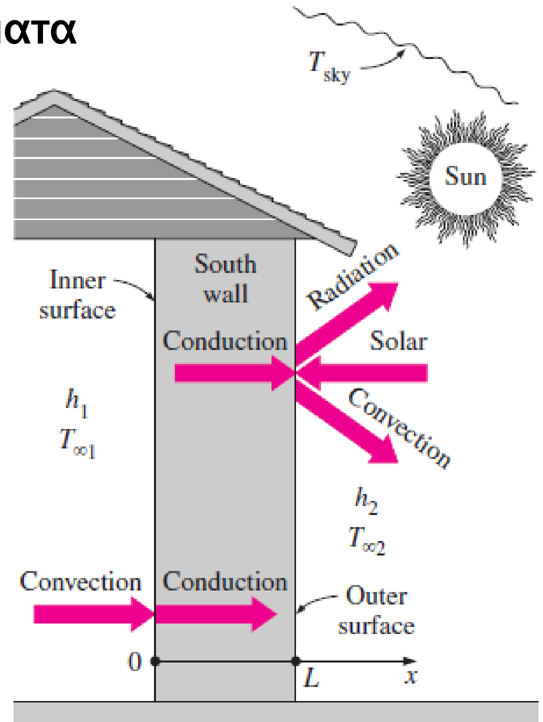
Γ

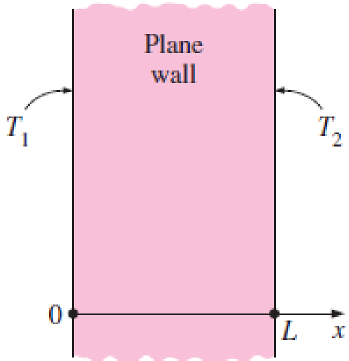
Συνοριακές και Αρχικές Συνθήκες

Εφαρμογές και Παραδείγματα
Κεφαλαίου 2, Παράγραφοι 2-4, 2-5

Να καταγραφούν οι εξισώσεις που διέπουν τους μηχανισμούς μετάδοσης θερμότητας στα ακόλουθα παραδείγματα

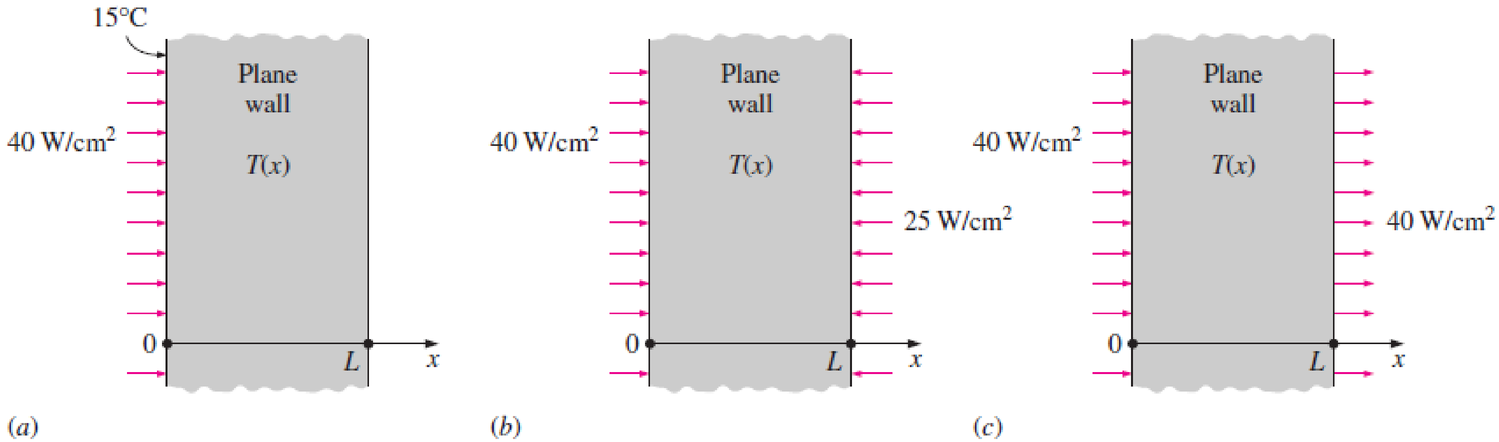


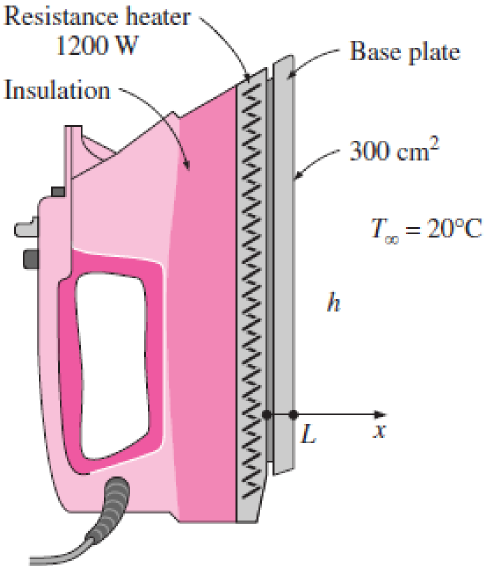


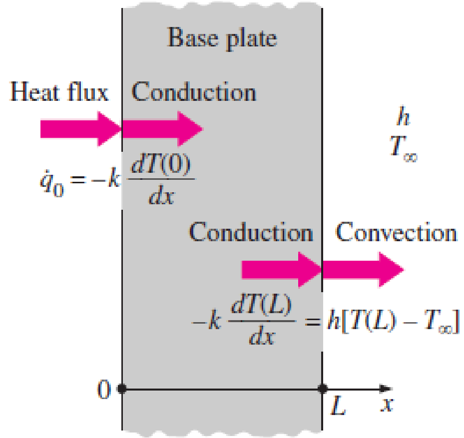


$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

$$T(x) = C_1x + C_2$$





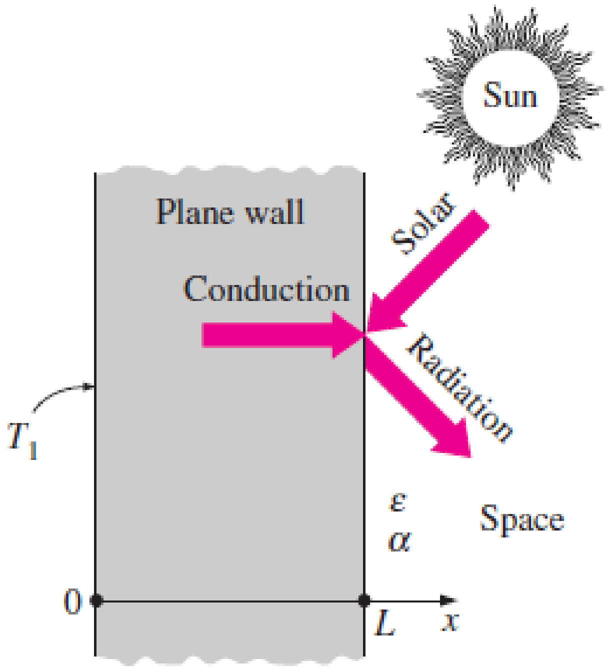


$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

$$-k\frac{dT(0)}{dx} = \dot{q}_0$$

$$-k\frac{dT(L)}{dx} = h[T(L) - T_\infty]$$

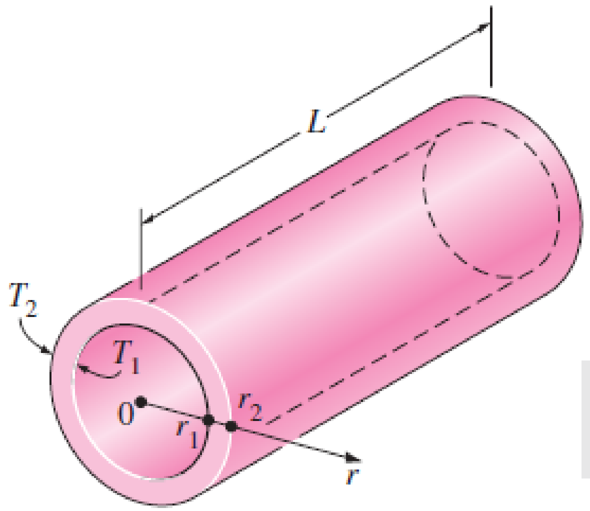
$$T(x) = T_\infty + \dot{q}_0\left(\frac{L - x}{k} + \frac{1}{h}\right)$$



$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

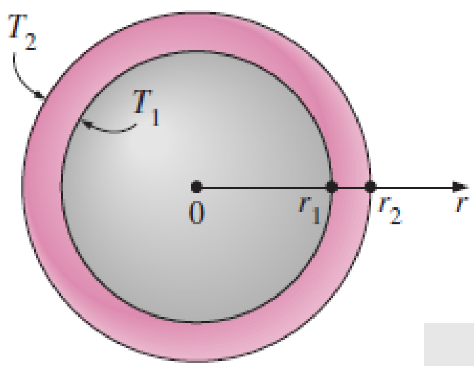
$$-k\frac{dT(L)}{dx} = \varepsilon\sigma[T(L)^4 - T_{\text{space}}^4] - \alpha q_{\text{solar}}$$

$$T(x) = \frac{\alpha q_{\text{solar}} - \varepsilon\sigma T_L^4}{k}x + T_1$$



$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

$$T(r) = \left(\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}\right)(T_2 - T_1) + T_1$$

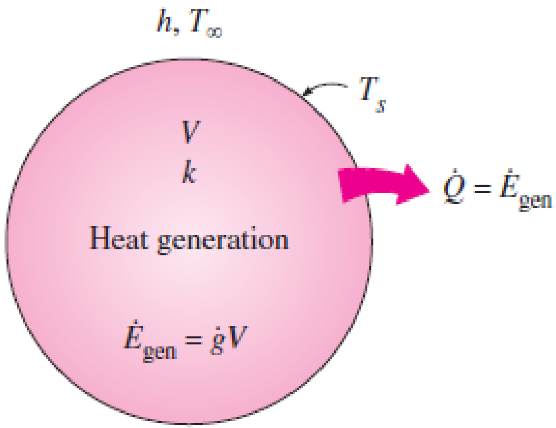


$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

$$T(r) = \frac{r_1 r_2}{r(r_2 - r_1)}(T_1 - T_2) + \frac{r_2 T_2 - r_1 T_1}{r_2 - r_1}$$

Υπάρχουν Αναλογίες στη μορφή των Αποτελεσμάτων?

Παραγωγή Θερμότητας σε Στερεά Υλικά



$$\begin{pmatrix} \text{Rate of} \\ \textit{heat transfer} \\ \text{from the solid} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Rate of} \\ \textit{energy generation} \\ \text{within the solid} \end{pmatrix}$$

$$\dot{Q} = \dot{g}V \qquad \text{(W)}$$

$$\dot{Q} = hA_s(T_s - T_\infty)$$

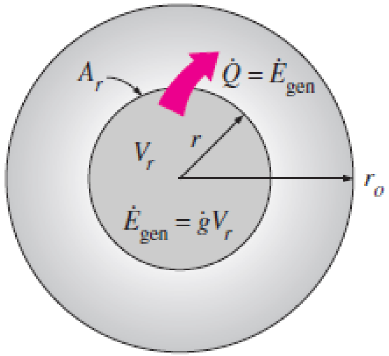
$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{g}V}{hA_s}$$

$$T_{s,\text{ plane wall}} = T_\infty + \frac{\dot{g}L}{h}$$

$$T_{s,\text{ cylinder}} = T_\infty + \frac{\dot{g}r_o}{2h}$$

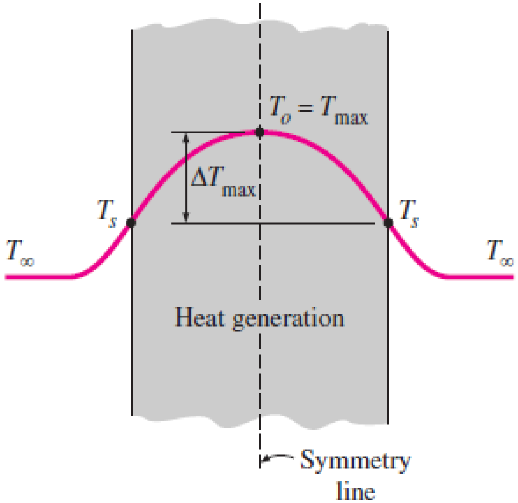
$$T_{s,\text{ sphere}} = T_\infty + \frac{\dot{g}r_o}{3h}$$

Εξαγωγή των σχέσεων



$$-kA_r \frac{dT}{dr} = \dot{g}V_r$$

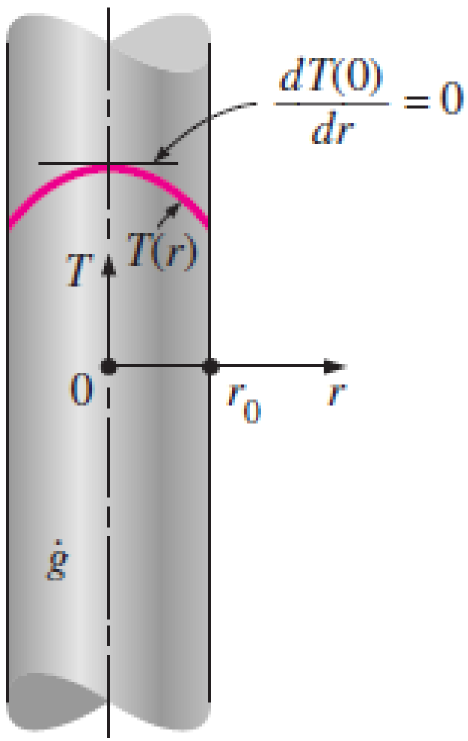
$$\Delta T_{\text{max, cylinder}} = T_o - T_s = \frac{\dot{g}r_o^2}{4k}$$



Εξαγωγή των σχέσεων για τοίχο και σφαίρα

$$\Delta T_{\text{max, plane wall}} = \frac{\dot{g}L^2}{2k}$$

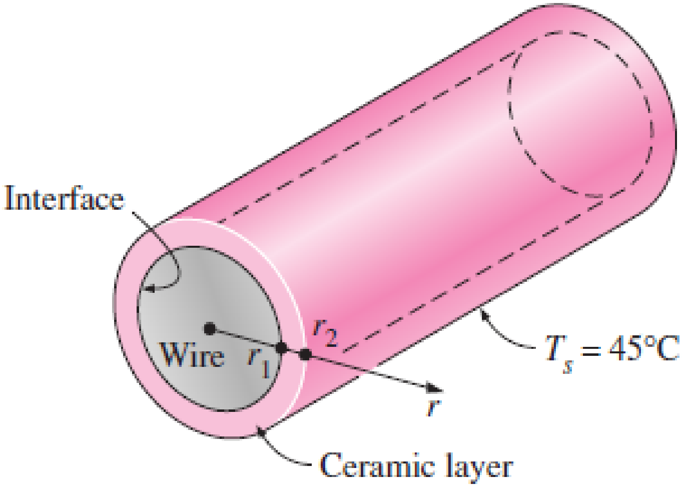
$$\Delta T_{\text{max, sphere}} = \frac{\dot{g}r_o^2}{6k}$$



$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

$$r\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{g}}{k}\frac{r^2}{2} + C_1$$

$$T(r) = T_s + \frac{\dot{g}}{4k}(r_0^2 - r^2)$$



$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT_{\text{wire}}}{dr}\right) + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

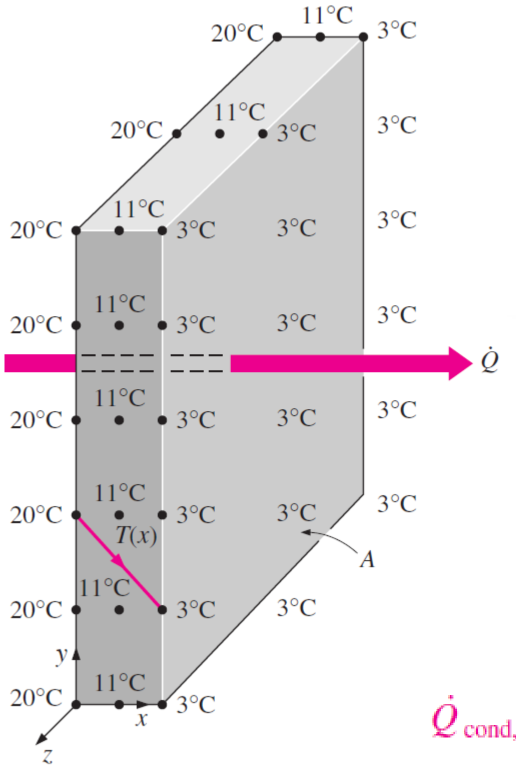
$$T_{\text{wire}}(r) = T_I + \frac{\dot{g}}{4k_{\text{wire}}}(r_1^2 - r^2)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT_{\text{ceramic}}}{dr}\right) = 0$$

$$T_{\text{ceramic}}(r) = \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}(T_s - T_I) + T_I$$

Συνδυασμός προβλημάτων με παραγωγή και μη θερμότητας

Μετάδοση Θερμότητας Υπό Σταθερές Συνθήκες



$$\begin{pmatrix}\text{Rate of}\\ \text{heat transfer}\\ \text{into the wall}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Rate of}\\ \text{heat transfer}\\ \text{out of the wall}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Rate of change}\\ \text{of the energy}\\ \text{of the wall}\end{pmatrix}$$

$$\dot{Q}_{\text{in}} - \dot{Q}_{\text{out}} = \frac{dE_{\text{wall}}}{dt}$$

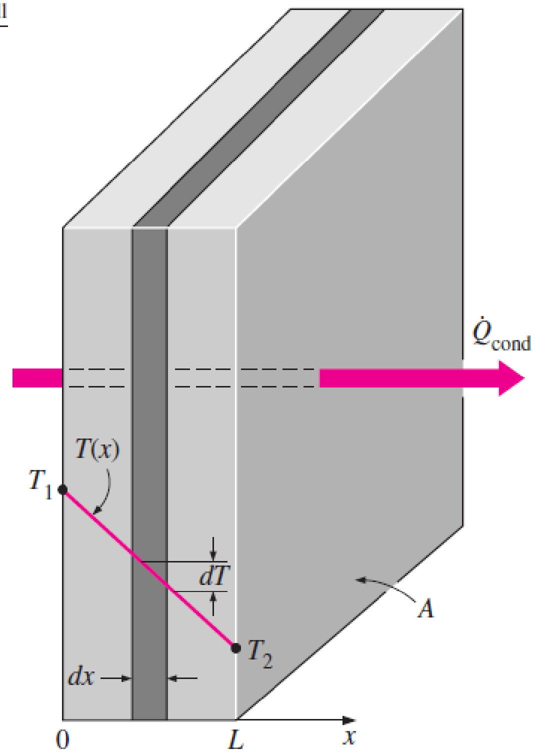
$$\dot{Q}_{\text{cond, wall}} = -kA\frac{dT}{dx}$$

$$\int_{x=0}^{L} \dot{Q}_{\text{cond, wall}}\, dx = -\int_{T=T_1}^{T_2} kA\, dT$$

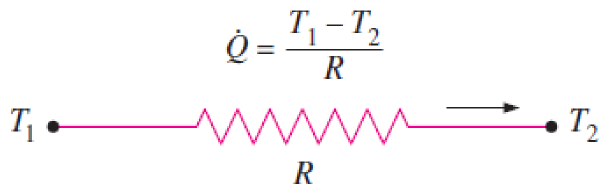
$$\dot{Q}_{\text{cond, wall}} = kA\frac{T_1 - T_2}{L}$$

$$R_{\text{wall}} = \frac{L}{kA}$$

$$\dot{Q}_{\text{cond, wall}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{wall}}}$$



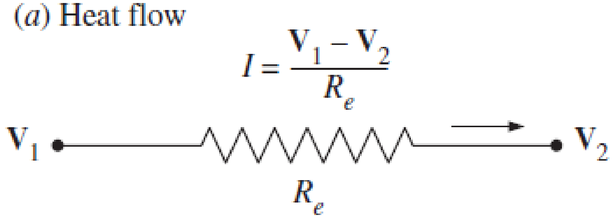
Η Ιδέα των Θερμικών Αντιστάσεων



(*a*) Heat flow

$$\dot{Q}_{\text{conv}} = \frac{T_s - T_\infty}{R_{\text{conv}}}$$

Αγωγή (Conduction)



(*b*) Electric current flow

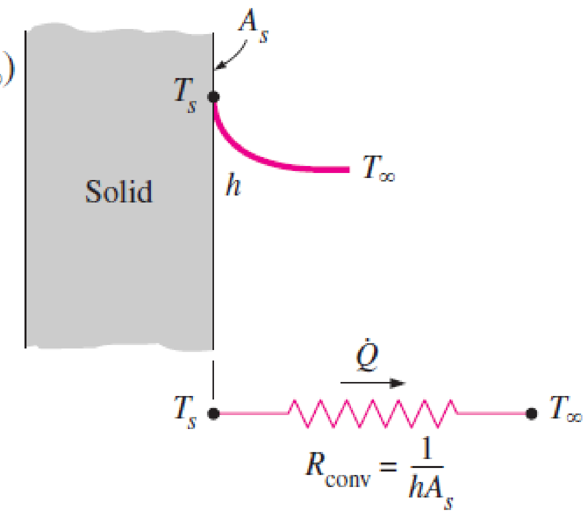
$$I = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{R_e}$$

Μεταφορά (Convection)

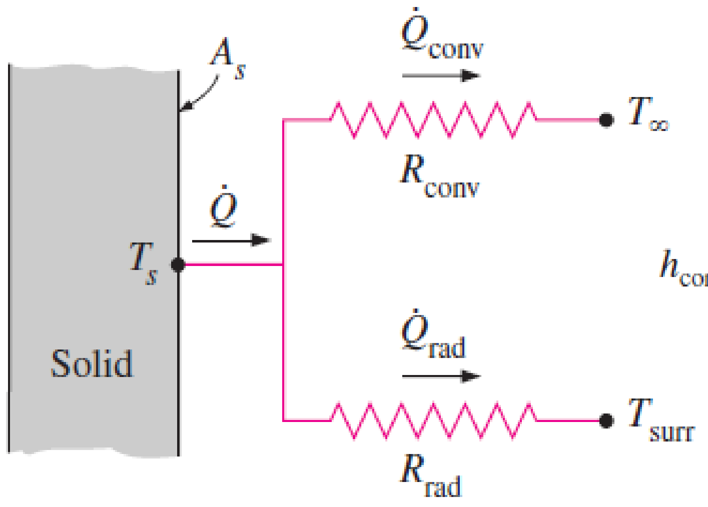
$$\dot{Q}_{\text{conv}} = hA_s(T_s - T_\infty)$$

$$\dot{Q}_{\text{conv}} = \frac{T_s - T_\infty}{R_{\text{conv}}}$$

$$R_{\text{conv}} = \frac{1}{hA_s}$$



Η Ιδέα των Θερμικών Αντιστάσεων



Μεταφορά (Convection)

$$h_{combined} = h_{conv} + h_{rad} \qquad T_{surr} \approx T_\infty$$

Ακτινοβολία (Radiation)

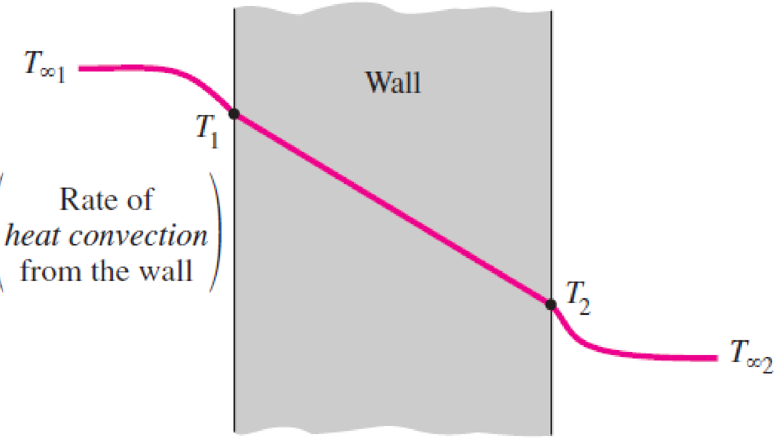
$$\dot{Q} = \dot{Q}_{conv} + \dot{Q}_{rad}$$

$$\dot{Q}_{rad} = \varepsilon\sigma A_s (T_s^4 - T_{surr}^4) = h_{rad} A_s (T_s - T_{surr}) = \frac{T_s - T_{surr}}{R_{rad}}$$

$$R_{rad} = \frac{1}{h_{rad} A_s}$$

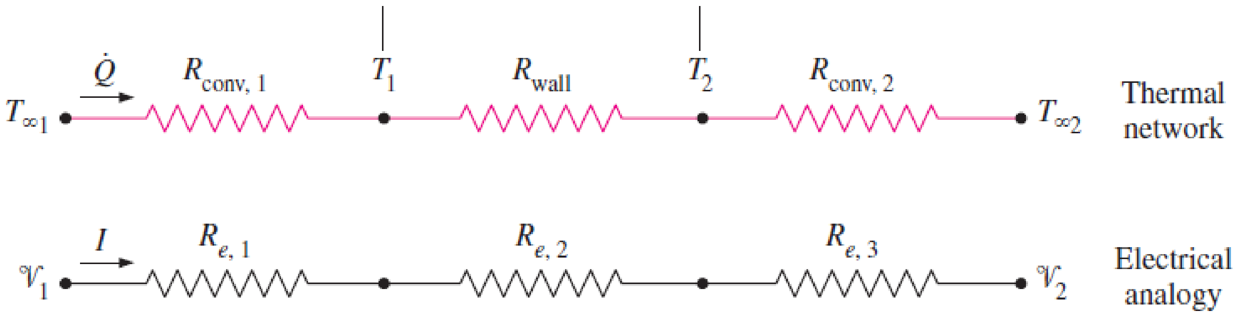
$$h_{rad} = \frac{\dot{Q}_{rad}}{A_s(T_s - T_{surr})} = \varepsilon\sigma(T_s^2 + T_{surr}^2)(T_s + T_{surr})$$

$$\begin{pmatrix}\text{Rate of}\\ \textit{heat convection}\\ \text{into the wall}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Rate of}\\ \textit{heat conduction}\\ \text{through the wall}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Rate of}\\ \textit{heat convection}\\ \text{from the wall}\end{pmatrix}$$



$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{\text{conv, 1}} + R_{\text{wall}} + R_{\text{conv, 2}}}$$

$$I = \frac{\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2}{R_{e,1} + R_{e,2} + R_{e,3}}$$



$$\dot{Q} = h_1 A(T_{\infty 1} - T_1) = kA\frac{T_1 - T_2}{L} = h_2 A(T_2 - T_{\infty 2})$$

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{1/h_1 A} = \frac{T_1 - T_2}{L/kA} = \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{1/h_2 A}$$
$$= \frac{T_{\infty 1} - T_1}{R_{\text{conv, 1}}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{wall}}} = \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{R_{\text{conv, 2}}}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty} - T_{\infty 2}}{R_{\text{total}}}$$

$$\boxed{R_{\text{total}} = R_{\text{conv, 1}} + R_{\text{wall}} + R_{\text{conv, 2}} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A}}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty} - T_{\infty 2}}{R_{total}}$$

$$\dot{Q} = \Delta T / R$$

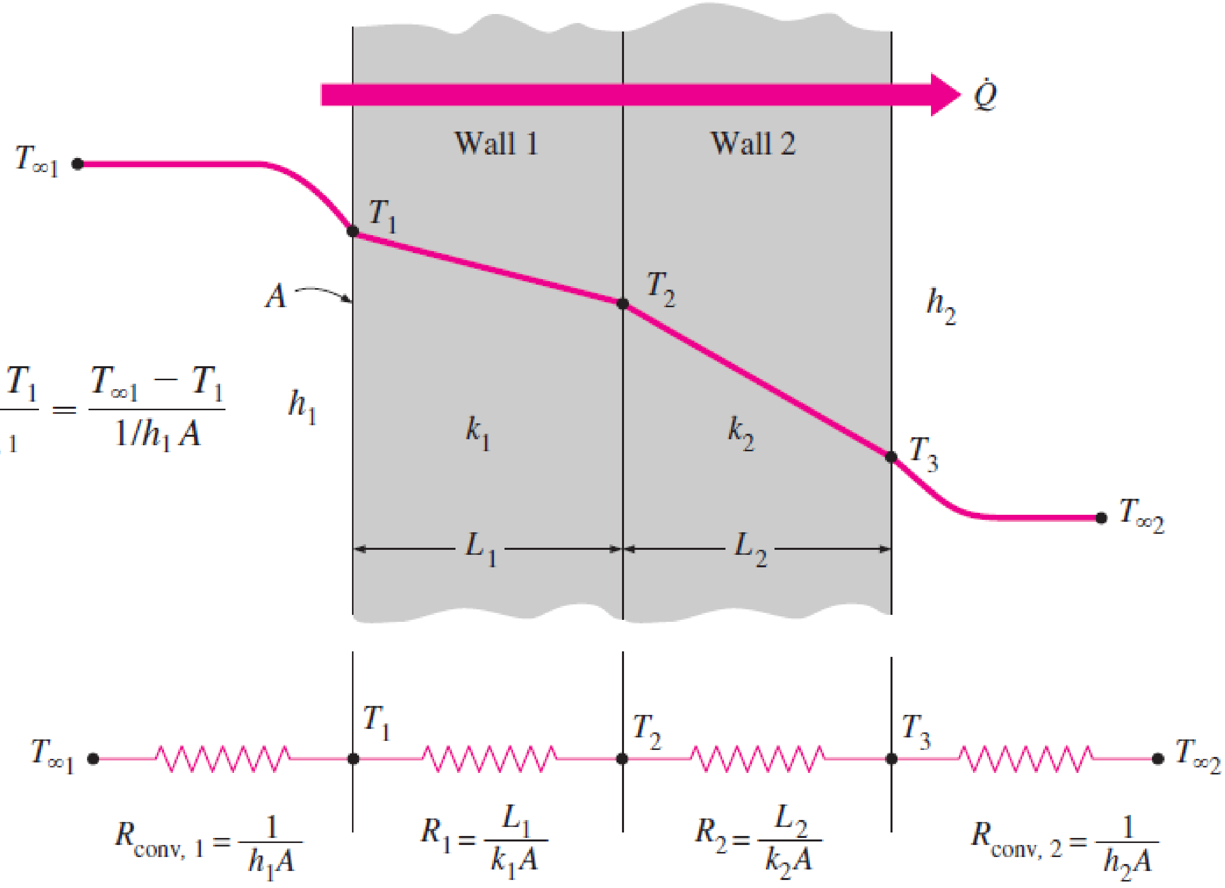
$$\Delta T = \dot{Q} R$$

$$\dot{Q} = UA\,\Delta T$$

$$UA = \frac{1}{R_{total}}$$

Ολικός Συντελεστής Μετάδοσης Θερμότητας

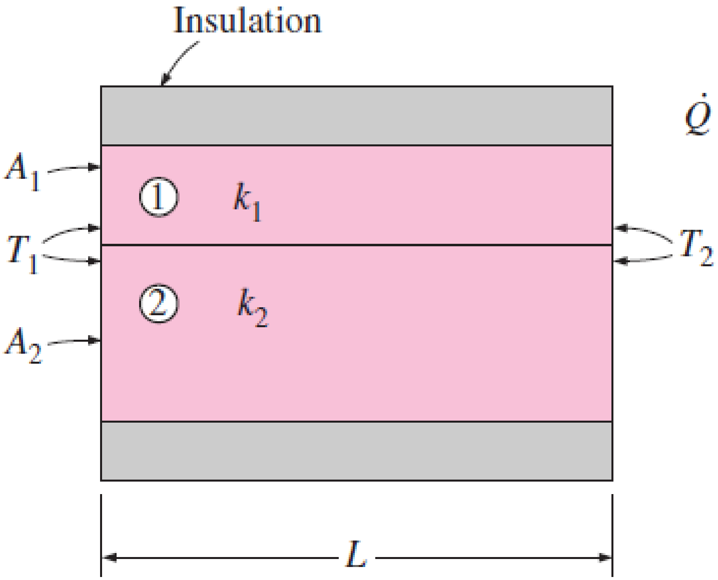
$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{R_{conv,\,1}} = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{1/h_1 A}$$

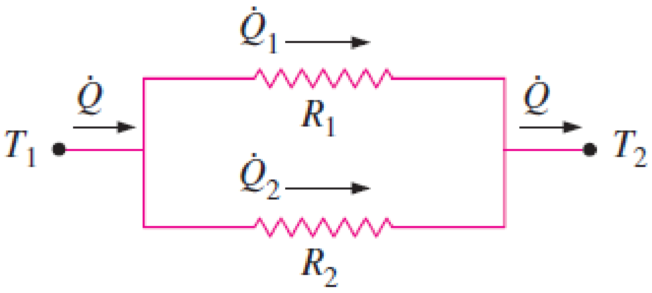


$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{total}}$$

$$R_{total} = R_{conv,\,1} + R_{wall,\,1} + R_{wall,\,2} + R_{conv,\,2}$$
$$= \frac{1}{h_1 A} + \frac{L_1}{k_1 A} + \frac{L_2}{k_2 A} + \frac{1}{h_2 A}$$

Γενικευμένα Δίκτυα Θερμικών Αντιστάσεων





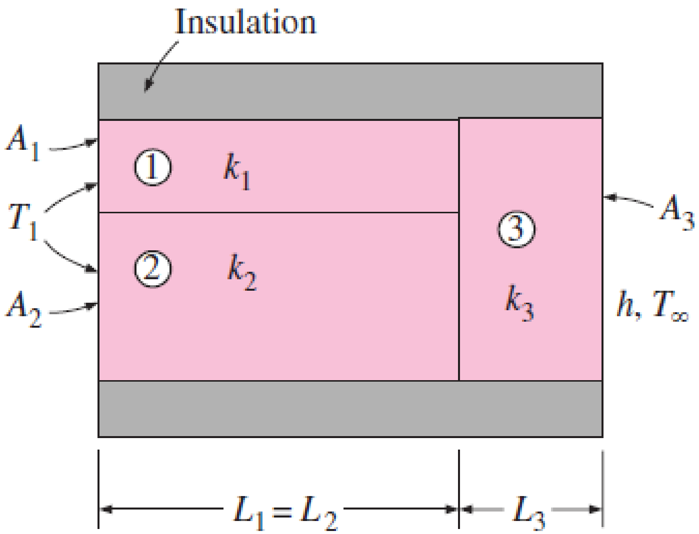
$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2$$

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_1} + \frac{T_1 - T_2}{R_2} = (T_1 - T_2)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{total}}}$$

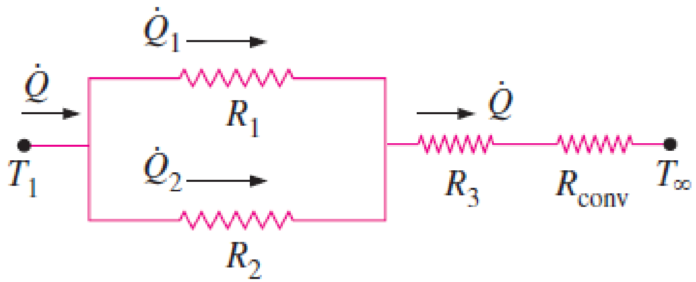
$$\frac{1}{R_{\text{total}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \longrightarrow R_{\text{total}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Γενικευμένα Δίκτυα Θερμικών Αντιστάσεων



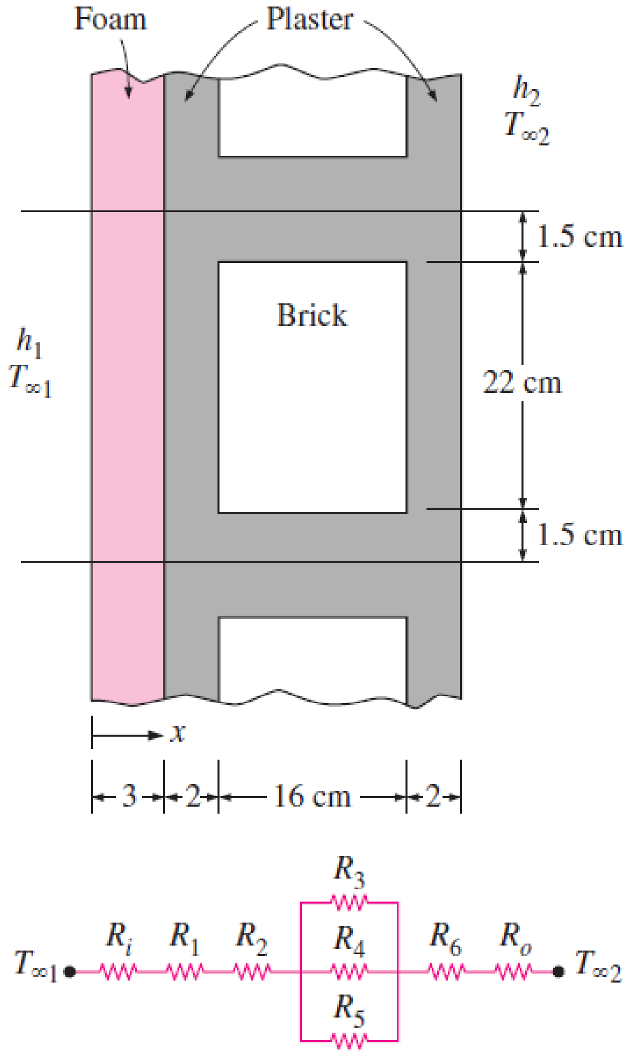
$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{\text{total}}}$$

$$R_{\text{total}} = R_{12} + R_3 + R_{\text{conv}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_{\text{conv}}$$

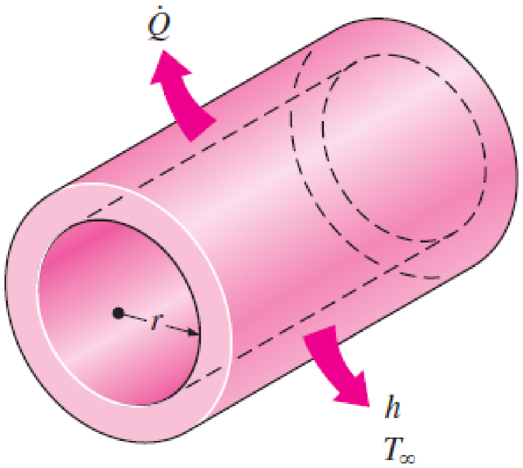


$$R_1 = \frac{L_1}{k_1 A_1}, \qquad R_2 = \frac{L_2}{k_2 A_2}, \qquad R_3 = \frac{L_3}{k_3 A_3}, \qquad R_{\text{conv}} = \frac{1}{h A_3}$$

Γενικευμένα Δίκτυα Θερμικών Αντιστάσεων



Παράδειγμα SOS



Κύλινδρος:

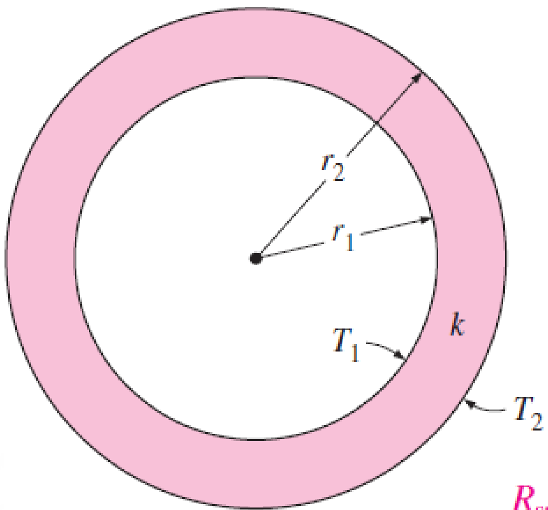
$$\dot{Q}_{\text{cond, cyl}} = -kA\frac{dT}{dr} \longrightarrow \int_{r=r_1}^{r_2} \frac{\dot{Q}_{\text{cond, cyl}}}{A}\, dr = -\int_{T=T_1}^{T_2} k\, dT$$

$$A = 2\pi r L$$

$$\dot{Q}_{\text{cond, cyl}} = 2\pi L k \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$\dot{Q}_{\text{cond, cyl}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{cyl}}}$$

$$R_{\text{cyl}} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k} = \frac{\ln(\text{Outer radius}/\text{Inner radius})}{2\pi \times (\text{Length}) \times (\text{Thermal conductivity})}$$

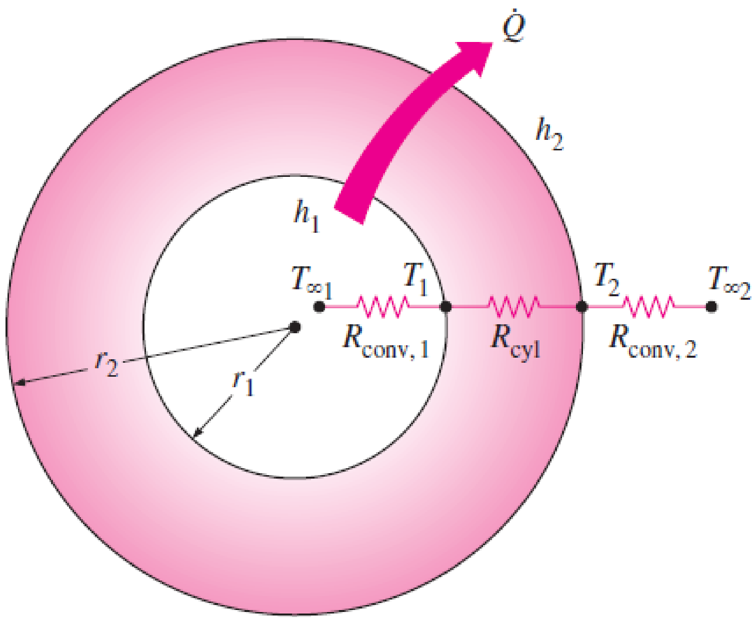


Αντίστοιχα για Σφαίρα:

$$\dot{Q}_{\text{cond, sph}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{sph}}}$$

$$R_{\text{sph}} = \frac{r_2 - r_1}{4\pi r_1 r_2 k} = \frac{\text{Outer radius} - \text{Inner radius}}{4\pi(\text{Outer radius})(\text{Inner radius})(\text{Thermal conductivity})}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{total}}$$



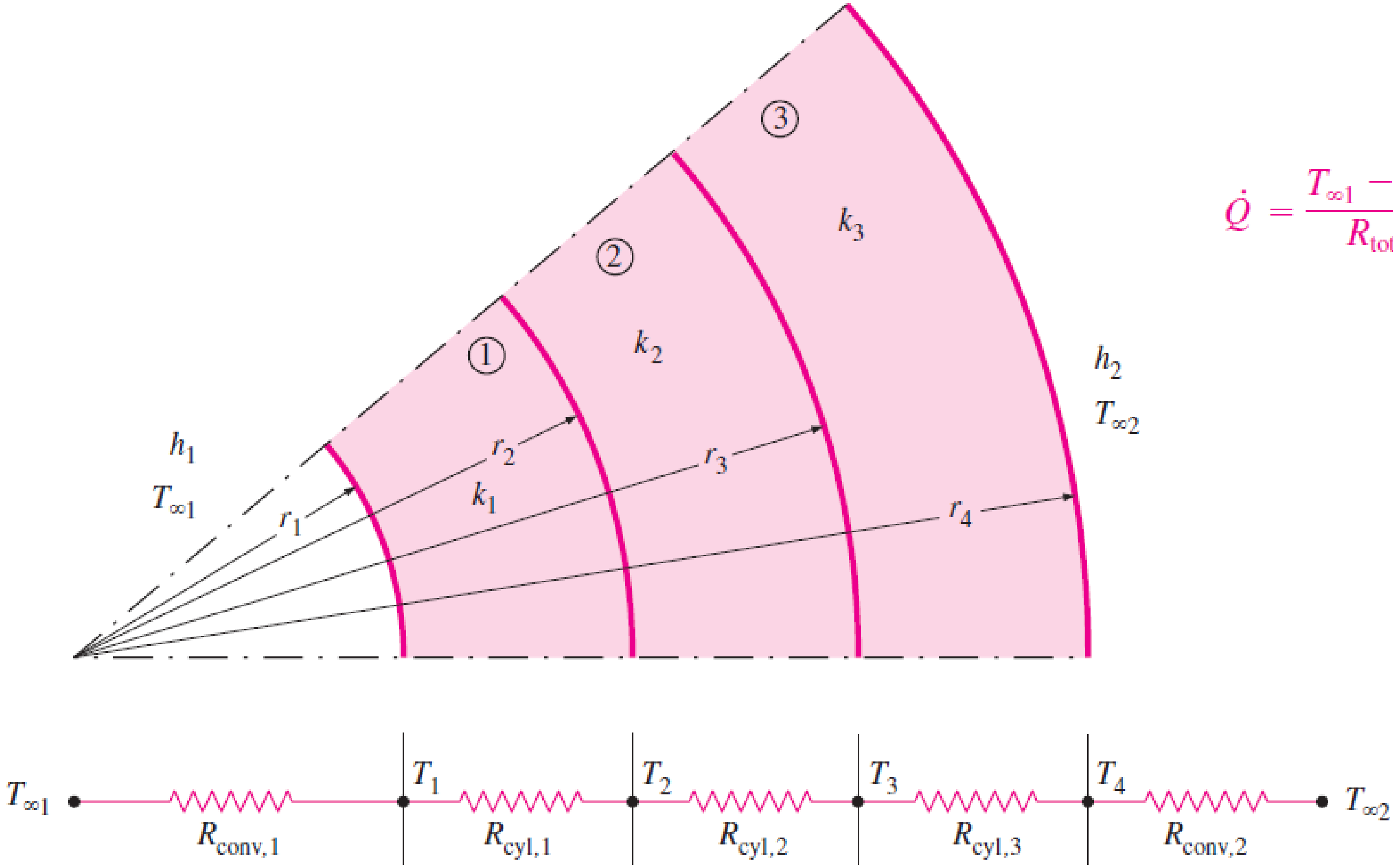
$R_{total} = R_{conv,1} + R_{cyl} + R_{conv,2}$

Κύλινδρος:

$$R_{total} = R_{conv,\,1} + R_{cyl} + R_{conv,\,2} = \frac{1}{(2\pi r_1 L)h_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k} + \frac{1}{(2\pi r_2 L)h_2}$$

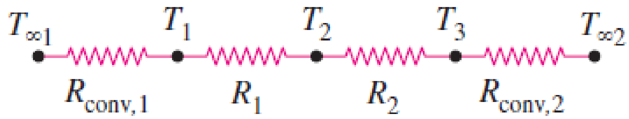
Αντίστοιχα για Σφαίρα:

$$R_{total} = R_{conv,\,1} + R_{sph} + R_{conv,\,2} = \frac{1}{(4\pi r_1^2)h_1} + \frac{r_2 - r_1}{4\pi r_1 r_2 k} + \frac{1}{(4\pi r_2^2)h_2}$$



$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{total}}$$

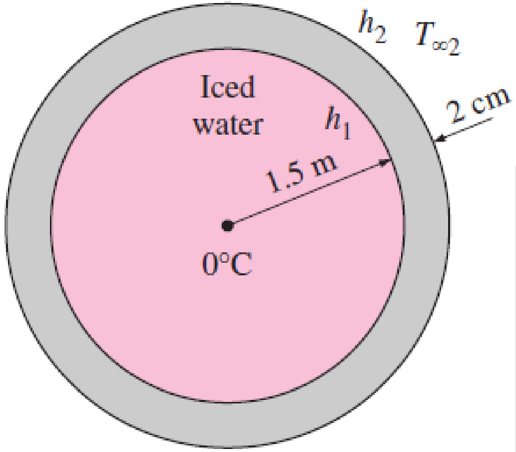
$$\begin{aligned} R_{total} &= R_{conv,\,1} + R_{cyl,\,1} + R_{cyl,\,2} + R_{cyl,\,3} + R_{conv,\,2} \\ &= \frac{1}{h_1 A_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k_1} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi L k_2} + \frac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi L k_3} + \frac{1}{h_2 A_4} \end{aligned}$$



$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{R_{\text{conv},1}}$$
$$= \frac{T_{\infty 1} - T_2}{R_{\text{conv},1} + R_1}$$
$$= \frac{T_1 - T_3}{R_1 + R_2}$$
$$= \frac{T_2 - T_3}{R_2}$$
$$= \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{R_2 + R_{\text{conv},2}}$$
$$= \cdots$$

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_2}{R_{\text{conv},1} + R_{\text{cyl},1}} = \frac{T_{\infty 1} - T_2}{\dfrac{1}{h_1(2\pi r_1 L)} + \dfrac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k_1}}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{R_2 + R_3 + R_{\text{conv},2}} = \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{\dfrac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi L k_2} + \dfrac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi L k_3} + \dfrac{1}{h_o(2\pi r_4 L)}}$$



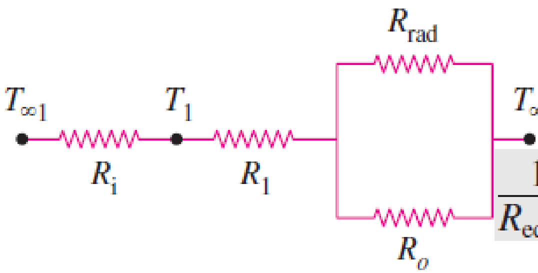
$$A_1 = \pi D_1^2$$
$$A_2 = \pi D_2^2$$
$$h_{rad} = \varepsilon\sigma(T_2^2 + T_{\infty 2}^2)(T_2 + T_{\infty 2})$$

$$R_i = R_{conv,\,1} = \frac{1}{h_1 A_1} = \frac{1}{(80\ \text{W/m}^2\cdot{}^\circ\text{C})(28.3\ \text{m}^2)} = 0.000442^\circ\text{C/W}$$

$$R_1 = R_{sphere} = \frac{r_2 - r_1}{4\pi k r_1 r_2} = \frac{(1.52 - 1.50)\ \text{m}}{4\pi\,(15\ \text{W/m}\cdot{}^\circ\text{C})(1.52\ \text{m})(1.50\ \text{m})}$$
$$= 0.000047^\circ\text{C/W}$$

$$R_o = R_{conv,\,2} = \frac{1}{h_2 A_2} = \frac{1}{(10\ \text{W/m}^2\cdot{}^\circ\text{C})(29.0\ \text{m}^2)} = 0.00345^\circ\text{C/W}$$

$$R_{rad} = \frac{1}{h_{rad} A_2} = \frac{1}{(5.34\ \text{W/m}^2\cdot{}^\circ\text{C})(29.0\ \text{m}^2)} = 0.00646^\circ\text{C/W}$$



$$\frac{1}{R_{equiv}} = \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_{rad}} = \frac{1}{0.00345} + \frac{1}{0.00646} \Rightarrow R_{equiv} = 0.00225^\circ\text{C/W}$$

$$R_{total} = R_i + R_1 + R_{equiv} = 0.000442 + 0.000047 + 0.00225 = 0.00274^\circ\text{C/W}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 2} - T_2}{R_{equiv}} \longrightarrow T_2 = T_{\infty 2} - \dot{Q}R_{equiv}$$
$$= 22^\circ\text{C} - (8029\ \text{W})(0.00225^\circ\text{C/W}) = 4^\circ\text{C}$$

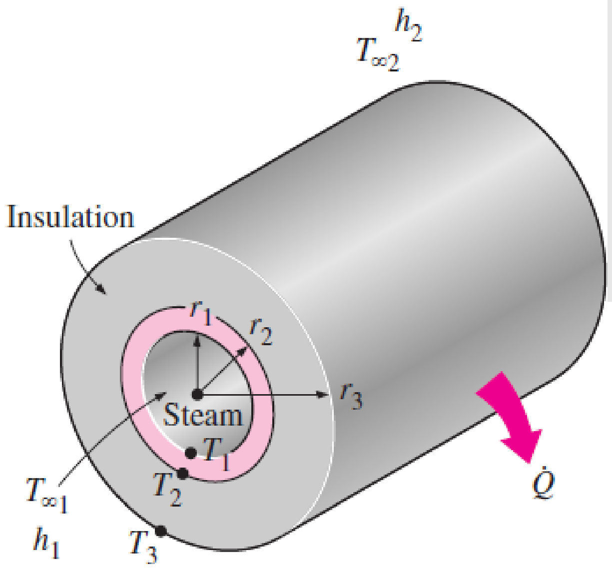
$$A_1 = 2\pi r_1 L$$
$$A_3 = 2\pi r_3 L$$

$$R_i = R_{\text{conv, 1}} = \frac{1}{h_1 A} = \frac{1}{(60\ \text{W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C})(0.157\ \text{m}^2)} = 0.106^\circ\text{C/W}$$

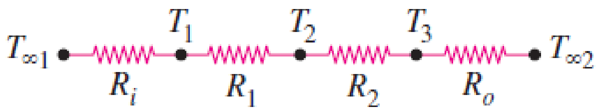
$$R_1 = R_{\text{pipe}} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_1 L} = \frac{\ln(2.75/2.5)}{2\pi(80\ \text{W/m} \cdot {}^\circ\text{C})(1\ \text{m})} = 0.0002^\circ\text{C/W}$$

$$R_2 = R_{\text{insulation}} = \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_2 L} = \frac{\ln(5.75/2.75)}{2\pi(0.05\ \text{W/m} \cdot {}^\circ\text{C})(1\ \text{m})} = 2.35^\circ\text{C/W}$$

$$R_o = R_{\text{conv, 2}} = \frac{1}{h_2 A_3} = \frac{1}{(18\ \text{W/m}^2 \cdot {}^\circ\text{C})(0.361\ \text{m}^2)} = 0.154^\circ\text{C/W}$$

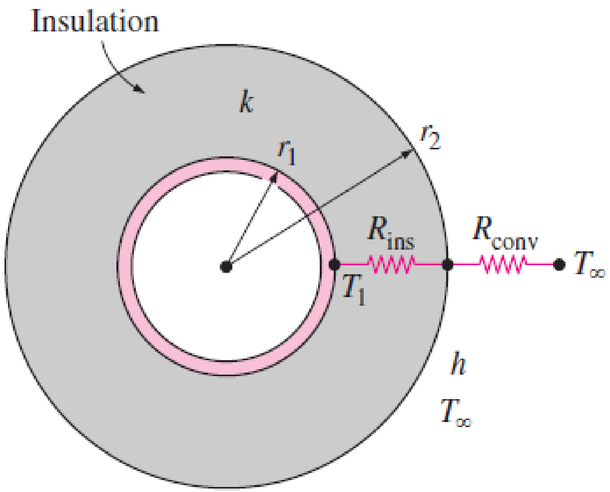


$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{\text{total}}} = \frac{(320 - 5)^\circ\text{C}}{2.61^\circ\text{C/W}} = \mathbf{121\ W}$$



$$\Delta T_{\text{pipe}} = \dot{Q} R_{\text{pipe}} = (121\ \text{W})(0.0002^\circ\text{C/W}) = \mathbf{0.02^\circ C}$$
$$\Delta T_{\text{insulation}} = \dot{Q} R_{\text{insulation}} = (121\ \text{W})(2.35^\circ\text{C/W}) = \mathbf{284^\circ C}$$

$$R_{\text{total}} = R_i + R_1 + R_2 + R_o = 0.106 + 0.0002 + 2.35 + 0.154 = 2.61^\circ\text{C/W}$$

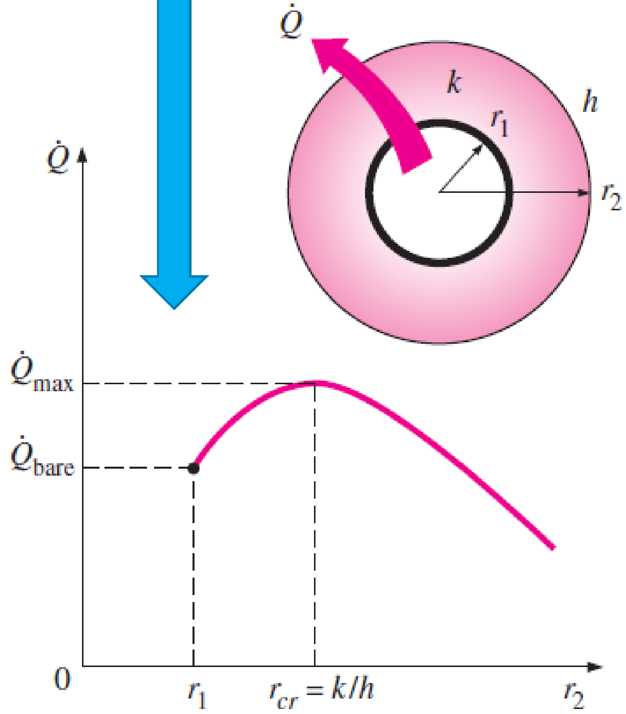


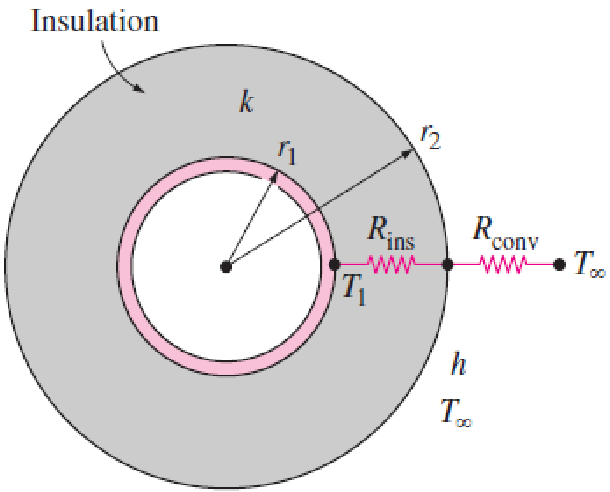
Κρίσιμο Πάχος Μόνωσης Κυλινδρικού σωλήνα

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{ins} + R_{conv}} = \frac{T_1 - T_\infty}{\dfrac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi Lk} + \dfrac{1}{h(2\pi r_2 L)}}$$

Συνθήκη για εύρεση κρίσιμη τιμή πάχους μόνωσης: $d\dot{Q}/dr_2 = 0$

$$r_{cr,\ cylinder} = \frac{k}{h}$$



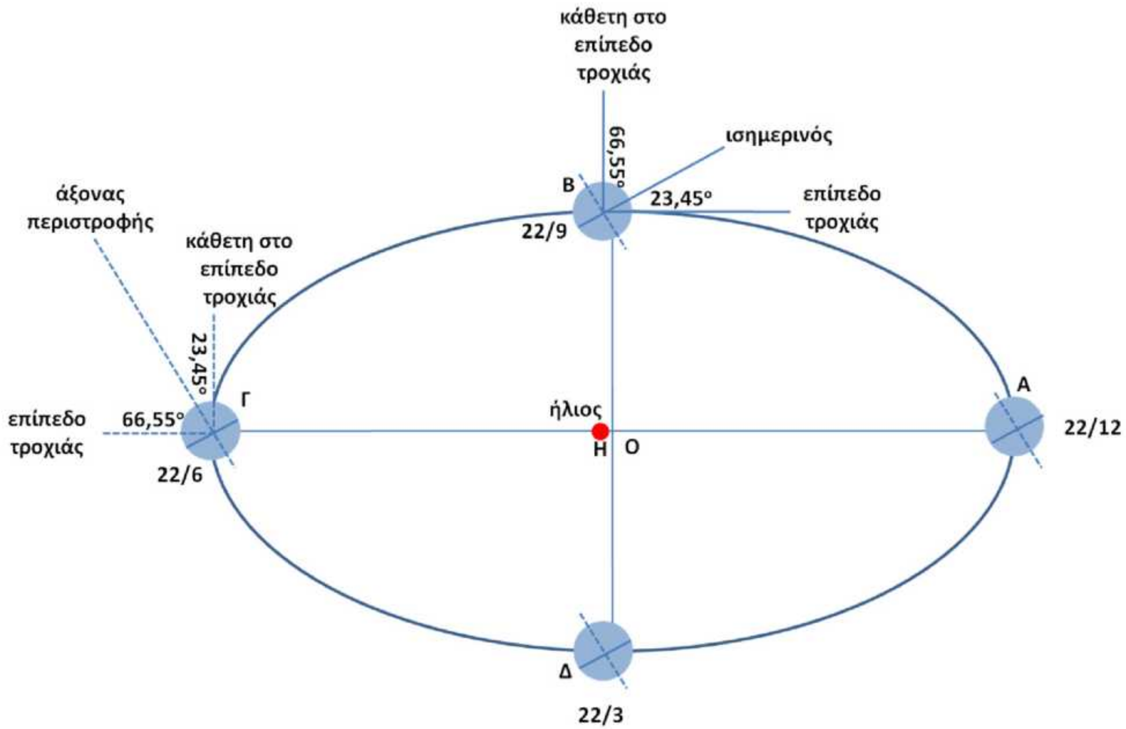


Κρίσιμο Πάχος Μόνωσης Σφαίρας

SOS !!!

$$r_{cr,\ sphere} = \frac{2k}{h}$$

Οι συνέπειες της κίνησης της Γης γύρω από τον Ήλιο



Σε κάθε νέα θέση, κατά την περιφορά, ο άξονας της γης παραμένει παράλληλος με την προηγούμενη. Όμως δεν είναι κάθετος στο επίπεδο της ελειπτικής τροχιάς και αποκλίνει από την κάθετο κατά:

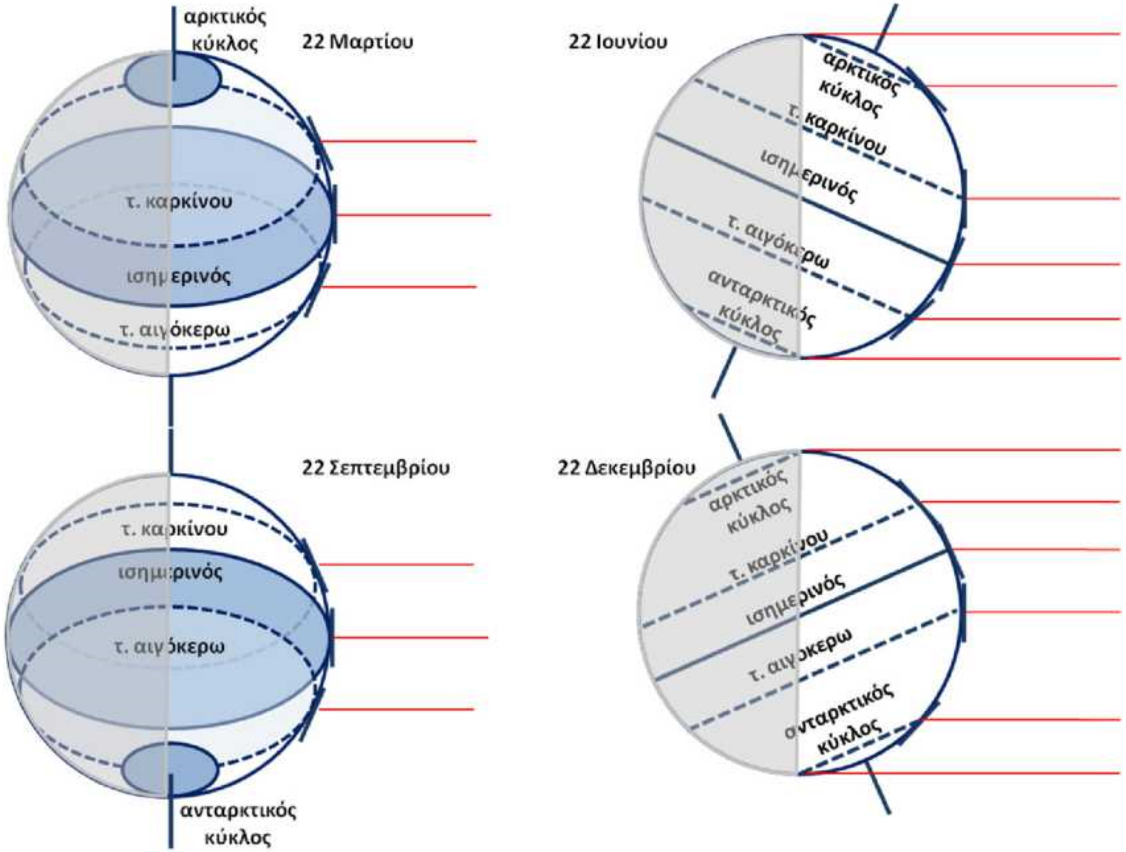
$$\delta_n = 23.45°$$

Το γεγονός αυτό είναι υπεύθυνο για την αλλαγή των εποχών κατά τη διάρκεια του έτους και για τη μεταβολή της διάρκειας της ημέρας και της νύχτας.

Η γωνία δ_n = 23.45° ορίζει:

- Το μέγιστο γεωγραφικό πλάτος (θετικό από τον ισημερινό και προς το βορά ή αρνητικό από τον ισημερινό προς το νότο), στο οποίο ο ήλιος μπορεί να φωτίσει κατακόρυφα (υπό γωνία 90°) - το μέγιστο αυτό βόρειο πλάτος +23.45° ορίζει τον τροπικό του καρκίνου, ο οποίος φωτίζεται κατακόρυφα στις 12 το μεσημέρι (ηλιακή ώρα) στις 22/6 και το μέγιστο νότιο πλάτος -23.45° ορίζει τον τροπικό του αιγόκερου, ο οποίος φωτίζεται κατακόρυφα στις 12 το μεσημέρι (ηλιακή ώρα) στις 22/12,
- τη γωνιακή θέση του ήλιου κατά το ηλιακό μεσημέρι κάθε ημέρας του έτους, σε σχέση με το επίπεδο του ισημερινού (η γωνία αυτή ονομάζεται απόκλιση δ_n και λαμβάνει τιμές στο διάστημα $-\delta < \delta_n < \delta$)

Οι συνέπειες της κίνησης της Γης γύρω από τον Ήλιο



Η τιμή της γωνίας δ_n κυμαίνεται από -23.45° μέχρι 23.45°, είναι διαφορετική για κάθε ημέρα του χρόνου και υπολογίζεται από τη σχέση:

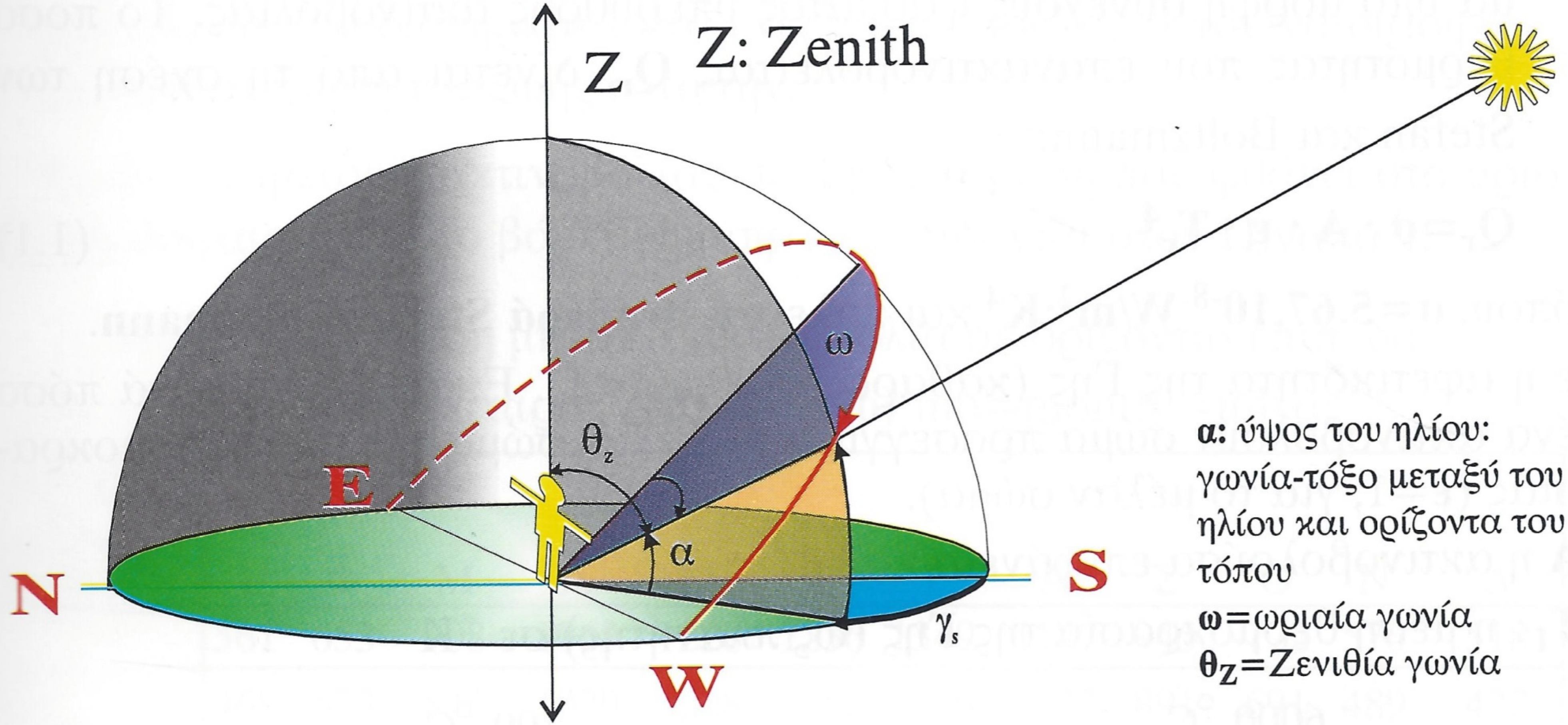
$$\delta_n = 23.45^\circ \cdot \sin\left(360\frac{284 + D_n}{365}\right)$$

όπου n είναι ο χαρακτηριστικός αριθμός της συγκεκριμένης ημέρας του χρόνου ($D_n = 1$ για την 1η Ιανουαρίου).

Κατά την περιφορά της γης η γωνία δ (απόκλιση) παίρνει τις παρακάτω τιμές, όπως μπορεί να υπολογιστεί και από την παραπάνω σχέση.

για $D_n = 81$	(22 Μαρτίου)	$\delta_n = 0°$	(εαρινή ισημερία)
για $D_n = 172.25$	(22 Ιουνίου)	$\delta_n = 23.45°$	(θερινό ηλιοστάσιο)
για $D_n = 263.5$	(22 Σεπτεμβρίου)	$\delta_n = 0°$	(φθινοπωρινή ισημερία)
για $D_n = 354.75$	(22 Δεκεμβρίου)	$\delta_n = -23.45°$	(χειμερινό ηλιοστάσιο)

Η Κίνηση του Ήλιου, Βασικές Έννοιες και Ορισμοί



α: ύψος του ηλίου: γωνία-τόξο μεταξύ του ηλίου και ορίζοντα του τόπου

ω=ωριαία γωνία

θ_Z=Ζενιθία γωνία

Ορίζοντας–Ουράνιος θόλος–Τροχιά του Ήλιου

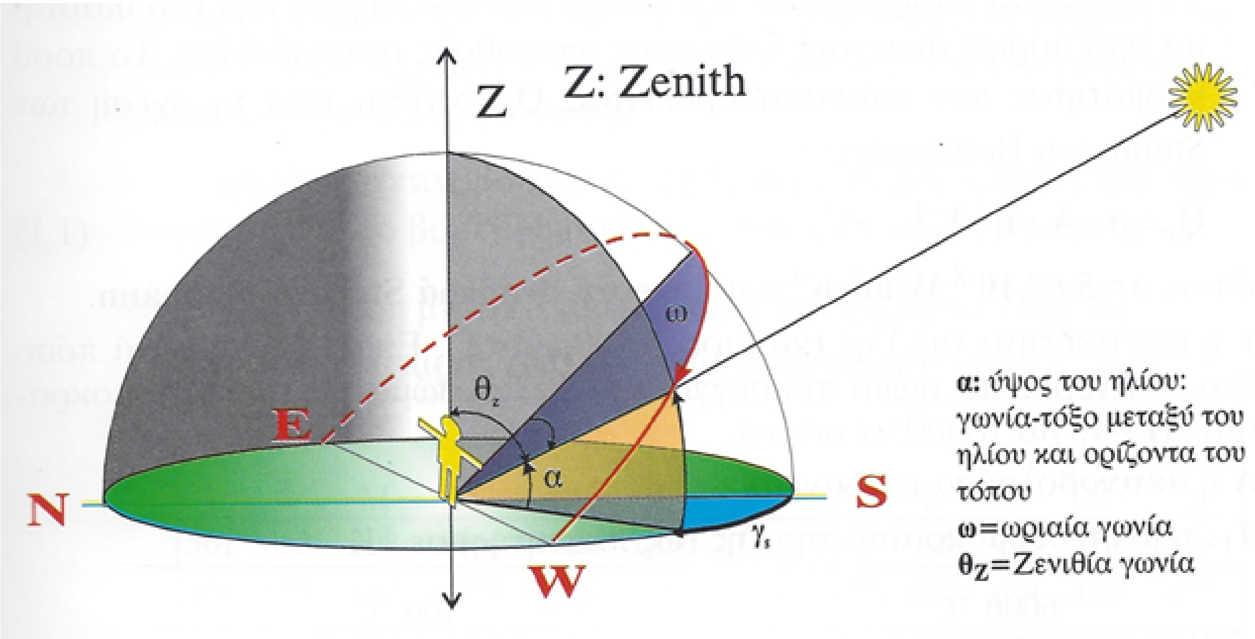
Ένταση της Ηλιακής Ακτινοβολίας Απουσία Ατμόσφαιρας και Βασικοί Ορισμοί

Για τον υπολογισμό της ηλιακής ακτινοβολίας στο κεκλιμένο επίπεδο, θα πρέπει να γνωρίζουμε:

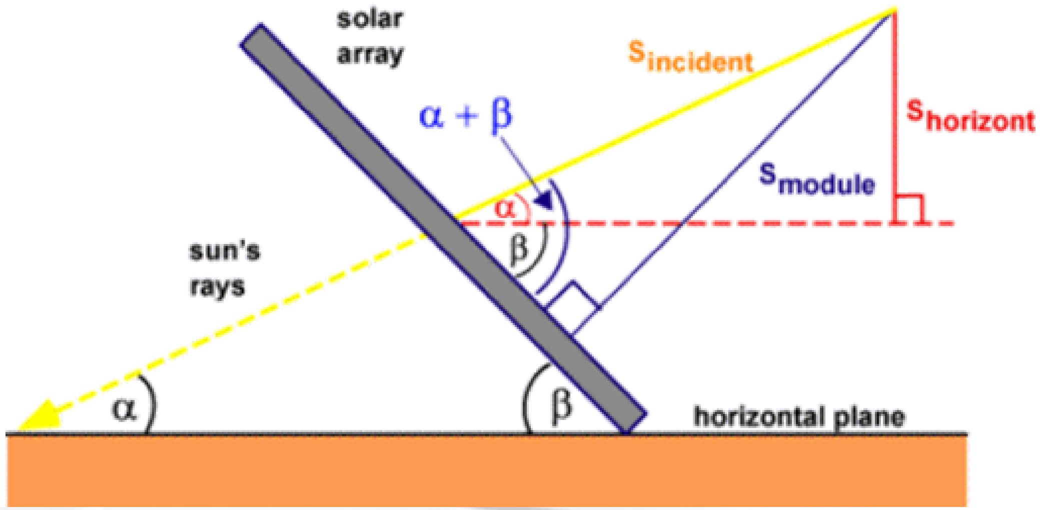
- την κλίση του συλλέκτη (**γωνία β**)
- την ημέρα και το μήνα του έτους (**γωνία δ_n**)
- τη θέση του τόπου (**γεωγραφικό πλάτος φ**)
- τη θέση του ήλιου στον ορίζοντα (**ωριαία γωνία ω**)
- την ποσότητα της ηλιακής ενέργειας στα όρια της ατμόσφαιρας

Αν τοποθετήσουμε ένα συλλέκτη σε οριζόντιο επίπεδο ή με κλίση β (από 0° μέχρι 90°) ως προς το οριζόντιο επίπεδο στην επιφάνεια της γης, ορίζονται οι παρακάτω γωνίες:

- η κλίση β της επιφάνειας συλλέκτη ως προς το οριζόντιο επίπεδο, είναι η γωνία που σχηματίζεται ανάμεσα στην επιφάνεια του συλλέκτη και το οριζόντιο επίπεδο
- η ζενιθιακή γωνία θ_z, που σχηματίζεται ανάμεσα στην κάθετο στο οριζόντιο επίπεδο και στην διεύθυνση της άμεσης ηλιακής ακτινοβολίας
- η γωνία πρόσπτωσης θ, που σχηματίζεται ανάμεσα στην κάθετο σε ένα σημείο του συλλέκτη και στη διεύθυνση της άμεσης ηλιακής ακτινοβολίας στο σημείο (όταν $\beta = 0$ τότε $\theta_z = \theta$)
- η Αζιμουθιακή γωνία γ_s επιφάνειας του συλλέκτη, που όταν ο συλλέκτης είναι προσανατολισμένος ακριβώς στο νότο η γωνία γ_s είναι ίση με μηδέν. Η γωνία γ_s ανατολικά είναι αρνητική με τιμές από 0 μέχρι -180° και δυτικά θετική από 0 μέχρι 180°.
- η ωραία γωνία ω, που είναι η γωνία ανάμεσα στον μεσημβρινό του τόπου και της θέσης του ήλιου (γωνιακή μετατόπιση του ήλιου ανατολικά ή δυτικά του μεσημβρινού).



Ορίζοντας–Ουράνιος θόλος–Τροχιά του Ήλιου



ΗΛΙΑΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ένταση της Ηλιακής Ακτινοβολίας και Βασικοί Ορισμοί

Ένταση ηλιακής ακτινοβολίας I (W/m²): Ο ρυθμός πρόσπτωσης της ηλιακής ακτινοβολίας σε κάποια επιφάνεια, ανά μονάδα επιφάνειας.

Άμεση ηλιακή ακτινοβολία, I_b (W/m²): Είναι η ηλιακή ακτινοβολία που φτάνει στην επιφάνεια της Γης χωρίς να έχει υποστεί σκέδαση στην ατμόσφαιρα.

Διάχυτη ηλιακή ακτινοβολία, I_d (W/m²): Είναι η ηλιακή ακτινοβολία που φτάνει στην επιφάνεια της γης, αφού έχει αλλάξει διεύθυνση από σκέδαση στην ατμόσφαιρα.

Ολική ηλιακή ακτινοβολία, I_t (W/m²): Το άθροισμα της άμεσης και της διάχυτης ηλιακής ακτινοβολίας σε κάποια επιφάνεια.

Γεωγραφικό πλάτος, φ, ενός τόπου: Η γωνιακή θέση του τόπου βόρεια ή νότια από τον ισημερινό και λαμβάνεται θετική προς βορρά ($-90° \leq \varphi \leq 90°$).

Απόκλιση, δ_n : Η γωνιακή θέση του ήλιου κατά την ηλιακή μεσημβρία σε σχέση με το ισημερινό επίπεδο και λαμβάνεται θετική προς βορρά. ($-23{,}45° \leq \delta_n \leq 23{,}45°$).

Ωριαία γωνία, ω : Η γωνιακή μετατόπιση του ήλιου ανατολικά ή δυτικά του τοπικού μεσημβρινού εξαιτίας της περιστροφής της γης με 15°/h και λαμβάνεται αρνητική για τις ώρες πριν το μεσημέρι και θετική μετά το μεσημέρι.

Ένταση της Ηλιακής Ακτινοβολίας και Βασικοί Ορισμοί

Ζενίθια γωνία, θ_z: Η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της καθέτου στο οριζόντιο επίπεδο ενός τόπου και της ευθείας που ενώνει τον τόπο με τον ήλιο.

Αέρια μάζα, m: Το πηλίκο του οπτικού πάχους της ατμόσφαιρας διαμέσου του οποίου περνά η άμεση ηλιακή ακτινοβολία, ως προς το οπτικό πάχος της ατμόσφαιρας, όταν ο ήλιος βρίσκεται στο ζενίθ. Για το επίπεδο της θάλασσας και για $0° < \theta_z < 65°$ είναι $m = 1/\cos\theta_z$. Για $\theta_z > 65°$ πρέπει να γίνει διόρθωση λόγω καμπυλότητας της γης.

Κλίση επιφάνειας, β: Η γωνία μεταξύ της εν λόγω επιφάνειας και του οριζόντιου επιπέδου ($0° \leq \beta \leq 180°$).

Αζιμούθια γωνία επιφάνειας, γ_s : Η απόκλιση που παρουσιάζει η προβολή σημείου στο οριζόντιο επίπεδο της κάθετης σε επιφάνεια, από τον τοπικό μεσημβρινό $\gamma = 0°$ προς νότο, $\gamma_s < 0°$, ανατολικά και $\gamma_s > 0°$ δυτικά. ($-180° \leq \gamma_s \leq 180°$).

Γωνία πρόσπτωσης, θ : Η γωνία που σχηματίζεται ανάμεσα στην διεύθυνση της άμεσης ηλιακής ακτινοβολίας σε ένα επίπεδο και στην κάθετο στο επίπεδο.

Ένταση της Ηλιακής Ακτινοβολίας και Βασικοί Ορισμοί

Απόκλιση, δ_n: Η γωνιακή θέση του ήλιου κατά την ηλιακή μεσημβρία σε σχέση με το ισημερινό επίπεδο και λαμβάνεται θετική προς βορρά. (-23,45° ≤ δ_n ≤ 23,45°).

$$\delta_n = 23.45° \cdot \sin\left(360\frac{284+D_n}{365}\right)$$

Ζενίθια γωνία, θ_z: Η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της καθέτου στο οριζόντιο επίπεδο ενός τόπου και της ευθείας που ενώνει τον τόπο με τον ήλιο.

$$\cos\theta_z = \cos\varphi \cdot \cos\delta_n \cdot \cos w + \sin\varphi \cdot \sin\delta_n$$

Αζιμούθια γωνία επιφάνειας, y_s: Η απόκλιση που παρουσιάζει η προβολή σημείου στο οριζόντιο επίπεδο της κάθετης σε επιφάνεια, από τον τοπικό μεσημβρινό y_s = 0° προς νότο, y_s < 0°, ανατολικά και y_s > 0° δυτικά. (-180° ≤ y_s ≤ 180°).

$$\sin y_s = \cos\delta_n \cdot \sin w \,/\, \sin\theta_z$$

Γωνία πρόσπτωσης, θ: Η γωνία που σχηματίζεται ανάμεσα στην διεύθυνση της άμεσης ηλιακής ακτινοβολίας σε ένα επίπεδο και στην κάθετο στο επίπεδο.

$$\cos\theta = \sin\delta_n \cdot \sin\varphi \cdot \cos\beta - \sin\delta_n \cdot \cos\varphi \cdot \sin\beta \cdot \cos y_s + \cos\delta_n \cdot \cos\varphi \cdot \cos\beta \cdot \cos w +$$
$$+ \cos\delta_n \cdot \sin\varphi \cdot \sin\beta \cdot \cos y_s \cdot \cos w + \cos\delta_n \cdot \sin\beta \cdot \sin y_s \cdot \sin w$$

Ένταση της Ηλιακής Ακτινοβολίας και Βασικοί Ορισμοί

Η ωριαία γωνία ανατολής ή δύσης του ηλίου ω_S (όπου θ_z = 90°) υπολογίζεται από την σχέση: $\cos \omega_S = -\tan\varphi \cdot \tan\delta_n$ και είναι αρνητική για την ανατολή και θετική για την δύση.

Το μήκος της ημέρας σε ώρες είναι: $N = (2/15)\cdot\cos^{-1}(-\tan\varphi\cdot\tan\delta_n)$

Ο υπολογισμός της ωριαίας γωνίας ω του ήλιου γίνεται με βάση τον **Αληθή Ηλιακό Χρόνο (ΑΗΧ),** ο οποίος σχετίζεται με τον **Τοπικό Ωρολογιακό Χρόνο (ΤΩΧ),** τον τόπο, την ημέρα και την θέση του ήλιου σύμφωνα με την σχέση:

$$AHX = T\Omega X - 4\cdot(L_{st} - L_{loc}) + E$$

όπου L_{st}: ο μεσημβρινός που μετράται ο χρόνος και L_{loc}: ο τοπικός μεσημβρινός.

Για την Ελλάδα L_{st} = 30° και η προηγούμενη σχέση γράφεται: $AHX = T\Omega X - 4\cdot(30° - L_{loc}) + E$

όπου **$E = 0.0172 + 0.4278\cdot\cos B - 7.3456\cdot\sin B - 3.3468\cdot\cos 2B - 9.3544\cdot\sin 2B$** (σε min).

$B = 360\cdot(D_n - 1) / 365$, n ημέρα του έτους ($1 \le D_n \le 365$).

Με την τιμή του AHX σε min υπολογίζεται η ωριαία γωνία του ήλιου ω από την σχέση:

$\omega = 15°\cdot[(AHX-720)/60]$ (σε μοίρες). Η τιμή 720 αντιστοιχεί στον AHX της μεσημβρίας του τόπου.

Ένταση της Ηλιακής Ακτινοβολίας και Ηλιακή Ενέργεια

Με δεδομένο ότι η Ένταση της Ηλιακής ακτινοβολίας <u>εκτός της ατμόσφαιρας</u> για συγκεκριμένη ζενίθια γωνία εκφράζεται:

$$I_o = I_{SC} \cdot \left[1 + 0.033 \cdot \cos\left(\frac{360 \cdot D_n}{365}\right)\right] \cdot \cos\theta_Z$$

Η συνολική ημερήσια ηλιακή ενέργεια σε οριζόντιο επίπεδο στο όριο της ατμόσφαιρας υπολογίζεται από την σχέση:

$$H_o = \frac{24 \cdot 3600 \cdot I_{SC}}{\pi} \cdot \left[1 + 0.033 \cdot \cos\left(\frac{360 \cdot D_n}{365}\right)\right] \cdot \left[\cos\varphi \cdot \cos\delta_n \cdot \sin\omega_S + \frac{2 \cdot \pi \cdot \omega_S}{360} \sin\varphi \cdot \sin\delta_n\right]$$

Για τον υπολογισμό της ηλιακής ενέργειας σε οριζόντιο επίπεδο στο όριο της ατμόσφαιρας και για το χρονικό διάστημα που αντιστοιχεί σε ωριαίες γωνίες του ήλιου ω_1, και ω_2 έχουμε:

$$H_o = \frac{24 \cdot 3600 \cdot I_{SC}}{\pi} \cdot \left[1 + 0.033 \cdot \cos\left(\frac{360 \cdot D_n}{365}\right)\right] \cdot \left[\cos\varphi \cdot \cos\delta_n \cdot (\sin\omega_2 - \sin\omega_1) + \frac{2 \cdot \pi \cdot (\omega_2 - \omega_1)}{360} \sin\varphi \cdot \sin\delta_n\right]$$

Ηλιακή Ενέργεια

$$H_o = \frac{24 \cdot 3600 \cdot I_{SC}}{\pi} \cdot \left[1 + 0.033 \cdot \cos\left(\frac{360 \cdot D_n}{365}\right)\right] \cdot \left[\cos\varphi \cdot \cos\delta_n \cdot (\sin\omega_2 - \sin\omega_1) + \frac{2 \cdot \pi \cdot (\omega_2 - \omega_1)}{360} \sin\varphi \cdot \sin\delta_n\right]$$

Δημιουργώντας το άθροισμα της H_o για όλες τις ημέρες κάθε μήνα βρίσκεται μια ημέρα το μήνα, που η τιμή της H_o πλησιάζει την μέση τιμή H_o του αθροίσματος.

Η ημέρα αυτή ονομάζεται μέση ή αντιπροσωπευτική ημέρα του μήνα και είναι (κατόπιν υπολογισμών):

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ	17	(D_n =17)	ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ	16	(D_n =47)
ΜΑΡΤΙΟΣ	16	(D_n =75)	ΑΠΡΙΛΙΟΣ	15	(D_n =105)
ΜΑΙΟΣ	15	(D_n =135)	ΙΟΥΝΙΟΣ	11	(D_n =162)
ΙΟΥΛΙΟΣ	17	(D_n =198)	ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ	16	(D_n =228)
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ	15	(D_n =258)	ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ	15	(D_n =288)
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ	14	(D_n =318)	ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ	10	(D_n =344)

Εκτίμηση της Ηλιακής Ενέργειας στην Επιφάνεια της Γης

Για τον υπολογισμό της διαθέσιμης ηλιακής ενέργειας στην επιφάνεια της Γης έχουν αναπτυχθεί τριών τύπων μοντέλα:

Εμπειρικά μοντέλα, που συνδέουν τις διάφορες παραμέτρους με σχέσεις που προκύπτουν από τον βέλτιστο συσχετισμό πραγματικών δεδομένων, έχουν τοπική κυρίως ισχύ με μεγαλύτερη ακρίβεια στις μηνιαίες προβλέψεις από τις ημερήσιες ή τις ωριαίες.

Ατμοσφαιρικά μοντέλα, που χρησιμοποιούν τιμές διαφόρων ατμοσφαιρικών παραμέτρων (υγρασία, θερμοκρασία, πίεση, όζον, CO_2, κλπ) και μπορούν να εφαρμοστούν οπουδήποτε αρκεί να είναι διαθέσιμα τα μετεωρολογικά δεδομένα που χρειάζονται.

Στοχαστικά μοντέλα, που χρησιμοποιούν δεδομένα ηλιακής ακτινοβολίας πολλών ετών και παράγουν διάφορες παραμέτρους των προβλημάτων με στοχαστικές διεργασίες.

Τα διαθέσιμα μετεωρολογικά δεδομένα τις περισσότερες φορές περιλαμβάνουν την ολική ηλιακή ακτινοβολία σε οριζόντιο επίπεδο και τις ώρες ηλιοφάνειας. Στις διάφορες εφαρμογές όμως της ηλιακής ενέργειας είναι απαραίτητο να υπολογίζεται η ηλιακή ακτινοβολία σε οποιοδήποτε επίπεδο (κλίσης β και αζιμούθιας γωνίας $\boldsymbol{\gamma_s}$) και ο υπολογισμός αυτός είναι πολύπλοκος.

Εκτίμηση της Ηλιακής Ενέργειας στην Επιφάνεια της Γης

Βήματα Υπολογισμού:

Αν E_T (σε J/m²) η συνολική ηλιακή ενέργεια που προσπίπτει σε κάποια επιφάνεια μέσα σε ένα μήνα (N ημέρες) τότε η **Μέση ανά Μήνα Ημερήσια (ΜΜΗ)** τιμή της ηλιακής ενέργειας είναι E_T/N (J/m²). Για τον υπολογισμό της ΜΜΗ ολικής ηλιακής ενέργειας σε κάποιο επίπεδο, H_T, πρέπει να υπολογιστούν:

$\overline{H}_b$ **Άμεση Μέση ανά Μήνα Ημερήσια ηλιακή ενέργεια σε οριζόντιο επίπεδο**

$\overline{H}_d$ **Διάχυτη Μέση ανά Μήνα Ημερήσια ηλιακή ενέργεια σε οριζόντιο επίπεδο**

$\overline{H}_{Tb}$ **Άμεση Μέση ανά Μήνα Ημερήσια ηλιακή ενέργεια σε κεκλιμένο επίπεδο**

$\overline{H}_{Td}$ **Διάχυτη Μέση ανά Μήνα Ημερήσια ηλιακή ενέργεια σε κεκλιμένο επίπεδο**

$\overline{H}_{Tr}$ **Ανακλώμενη από το έδαφος Μέση ανά Μήνα Ημερήσια ηλιακή ενέργεια στο κεκλιμένο επίπεδο**

Με τις τιμές αυτές υπολογίζεται η ΜΜΗ ολική ηλιακή ακτινοβολία στο κεκλιμένο επίπεδο:

$$\overline{H}_T = \overline{H}_{Tb} + \overline{H}_{Td} + \overline{H}_{Tr}$$

Εκτίμηση της Ηλιακής Ενέργειας στην Επιφάνεια της Γης

Μέθοδος Liu Jordan:

Για τους υπολογισμούς χρησιμοποιούνται συνήθως δύο παράμετροι:

- Η παράμετρος συσχέτισης ηλιακής ακτινοβολίας σε κεκλιμένο επίπεδο προς οριζόντιο επίπεδο, $\overline{R}$
- Ο δείκτης αιθριότητας, $\overline{K}_T$

Ο συντελεστής αιθριότητας ορίζεται ως το πηλίκο της Μέσης ανά Μήνα Ημερήσιας ολικής ηλιακής ενέργειας στο οριζόντιο επίπεδο της Γης προς τη Μέση ανά Μήνα Ημερήσια ολική ηλιακή ενέργεια στο οριζόντιο επίπεδο εκτός της ατμόσφαιρας, (ΜΜΗ οριζόντιο επίπεδο Γης)/(ΜΜΗ οριζόντιο επίπεδο εκτός ατμόσφαιρας):

$$\overline{K}_T = \frac{\overline{H}}{\overline{H}_O}$$

Όπου: $\overline{H}_O = \frac{\sum_{N=1}^{N} H_O}{N}$. Με βάση αυτόν τον υπολογισμό και $\overline{H}_T = \overline{H}_{Tb} + \overline{H}_{Td} + \overline{H}_{Tr}$, ορίζουμε:

$$\overline{R} = \frac{\overline{H}_T}{\overline{H}} = \left(1 - \frac{\overline{H}_d}{\overline{H}}\right) \cdot \overline{R}_b + \frac{\overline{H}_d}{\overline{H}} \cdot \overline{R}_d + \rho \cdot \overline{R}_r$$

Εκτίμηση της Ηλιακής Ενέργειας στην Επιφάνεια της Γης

$$\overline{H}_T = \overline{H}_{Tb} + \overline{H}_{Td} + \overline{H}_{Tr} \Rightarrow \overline{R} = \frac{\overline{H_T}}{\overline{H}} = \left(1 - \frac{\overline{H_d}}{\overline{H}}\right) \cdot \overline{R_b} + \frac{\overline{H_d}}{\overline{H}} \cdot \overline{R_d} + \rho \cdot \overline{R_r}$$

$$\frac{\overline{H_d}}{\overline{H}} = \frac{\text{ΜΜΗ διάχυτη ηλιακή ενέργεια σε οριζόντιο επίπεδο}}{\text{ΜΜΗ ολική ηλιακή ενέργεια σε οριζόντιο επίπεδο}}$$

$$\overline{R_b} = \frac{\text{ΜΜΗ άμεση ηλιακή ενέργεια σε κεκλιμένο επίπεδο}}{\text{ΜΜΗ άμεση ηλιακή ενέργεια σε οριζόντιο επίπεδο}}$$

$$\overline{R_d} = \frac{\text{ΜΜΗ διάχυτη ηλιακή ενέργεια σε κεκλιμένο επίπεδο}}{\text{ΜΜΗ διάχυτη ηλιακή ενέργεια σε οριζόντιο επίπεδο}}$$

$$\overline{R_r} = \frac{\text{ΜΜΗ ανακλώμενη από το έδαφος ηλιακή ενέργεια σε κεκλιμένο επίπεδο}}{\text{ΜΜΗ ανακλώμενη από το έδαφος ηλιακή ενέργεια σε οριζόντιο επίπεδο}}$$

Επιφάνεια	**Συντελεστής Ανάκλασης, ρ**
Καθαρό χιόνι	0.80 - 0.95
Βρώμικο χιόνι	0.40 - 0.70
Άμμος	0.20 - 0.45
Γρασίδι	0.15 - 0.25
Συνήθως	0.20

Εκτίμηση της Ηλιακής Ενέργειας στην Επιφάνεια της Γης

$$\overline{H}_T = \overline{H}_{Tb} + \overline{H}_{Td} + \overline{H}_{Tr} \Rightarrow \overline{R} = \frac{\overline{H}_T}{\overline{H}} = \left(1 - \frac{\overline{H}_d}{\overline{H}}\right) \cdot \overline{R}_b + \frac{\overline{H}_d}{\overline{H}} \cdot \overline{R}_d + \rho \cdot \overline{R}_r$$

Η τιμή της ΜΜΗ ολικής ηλιακής ενέργειας σε οριζόντιο επίπεδο προσδιορίζεται είτε από υπάρχοντα δεδομένα είτε (όταν αυτά δεν υπάρχουν) από την εμπειρική σχέση (μοντέλο Angstrom):

$$\frac{\overline{H}}{\overline{H}_o} = \alpha + b\frac{\overline{n}}{\overline{N}}$$

όπου *a* και *b* είναι εμπειρικές παράμετροι εξαρτώμενες από τα κλιματολογικά δεδομένα του τόπου.

Επίσης: $\overline{n}$ είναι ο αριθμός ωρών ηλιοφάνειας και $\overline{N}$ ο μέγιστος αριθμός ωρών ηλιοφάνειας.

Με βάση τον συντελεστή αιθριότητας (Liu & Jordan, Collares-Periara & Rabl, Λάλα, Πισιμάνη, Νοταρίδου):

$$\frac{\overline{H}_d}{\overline{H}} = 1.446 - 2.965 \cdot \overline{K}_T + 1.727 \cdot \overline{K}_T^2$$

Τέλος για τους συντελεστές διόρθωσης έχουμε: $\overline{R}_d = \dfrac{1+\cos\beta}{2}$ και $\overline{R}_r = \dfrac{1-\cos\beta}{2}$, όπου β η κλίση της επιφάνειας.

Οι συντελεστές αυτοί προκύπτουν θεωρώντας ότι η διάχυτη ηλιακή ενέργεια σε κεκλιμένο επίπεδο προέρχεται ομοιόμορφα από ολόκληρο τον ουράνιο θόλο και η ανακλώμενη ηλιακή ενέργεια προέρχεται από την ανάκλαση της άμεσης και διάχυτης ηλιακής ενέργειας.

Εκτίμηση της Ηλιακής Ενέργειας στην Επιφάνεια της Γης

Καταλήγουμε στις δύο ισοδύναμες εξισώσεις:

$$\overline{H_T} = \left[\left(0.446 + 2.965 \cdot \overline{K_T} - 1.727 \cdot \overline{K_T}^2\right) \cdot \overline{R_b} + \left(1.446 - 2.965 \cdot \overline{K_T} + 1.727 \cdot \overline{K_T}^2\right) \cdot \left(\frac{1+\cos\beta}{2}\right) + \rho \cdot \left(\frac{1-\cos\beta}{2}\right)\right] \cdot \overline{H}$$

$$\frac{\overline{H_T}}{\overline{H}} = \overline{R} = \left(0.446 + 2.965 \cdot \overline{K_T} - 1.727 \cdot \overline{K_T}^2\right) \cdot \overline{R_b} + \left(1.446 - 2.965 \cdot \overline{K_T} + 1.727 \cdot \overline{K_T}^2\right) \cdot \left(\frac{1+\cos\beta}{2}\right) + \rho \cdot \left(\frac{1-\cos\beta}{2}\right)$$

Η τιμή του $\overline{R_b}$ υπολογίζεται από τις παρακάτω σχέσεις για κεκλιμένη επιφάνεια με αζιμούθιο γ = 0° και για το βόρειο ημισφαίριο:

$$\overline{R_b} = \frac{\cos(\varphi-\beta) \cdot \cos\delta_n \cdot \sin\omega_s' + \left(\frac{\pi}{180}\right) \cdot \omega_s' \cdot \sin(\varphi-\beta) \cdot \sin\delta_n}{\cos\varphi \cdot \cos\delta_n \cdot \sin\omega_s + \left(\frac{\pi}{180}\right) \cdot \omega_s \cdot \sin\varphi \cdot \sin\delta_n}$$

$$\omega_s = \cos^{-1}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_n) \qquad \omega_s' = \min\left[\cos^{-1}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_n), \cos^{-1}(-\tan(\varphi+\beta) \cdot \tan\delta_n)\right]$$

- ω_s **: η ωριαία γωνία δύσης του ήλιου για οριζόντια επιφάνεια**
- ω_s' **: η ωριαία γωνία δύσης του ήλιου για κεκλιμένη επιφάνεια**
- φ **: γεωγραφικό πλάτος τόπου**
- β **: κλίση επιφάνειας**
- δ_n **: απόκλιση του ήλιου (της μέσης ημέρας του μήνα).**

ΤΕΛΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ