ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ)

1: Ένα κουτί έχει τριάντα μπάλες, δέκα άσπρες, δέκα μαύρες και δέκα κόκκινες. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία άλλη μια φορά. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να εξαχθούν δυο μπάλες διαφορετικού χρώματος.

ΛΥΣΗ
Τυχαία μεταβλητή Χ=το χρώμα της μπάλας που τραβάω από το κουτί
Δειγματικός χώρος Ω={ΑΑ, ΑΜ, ΑΚ, ΜΑ, ΜΜ, ΜΚ, ΚΑ, ΚΜ, ΚΚ}, σύνολο=9
Συνολο Ευνοϊκών Ενδεχομένων Ω'={ΑΜ, ΑΚ, ΜΑ, ΜΚ, ΚΑ, ΚΜ}, σύνολο=6
Πιθανότητα να εξαχθούν δυο μπάλες διαφορετικού χρώματος=P(Ω')/P(Ω)=6/9=2/3

2: Ένα κουτί έχει τριάντα μπάλες, δέκα άσπρες, δέκα μαύρες και ~~μία~~ δέκα κόκκινες. Παίρνουμε ταυτόχρονα 2 μπάλλες. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να εξαχθούν δυο μπάλες διαφορετικού χρώματος.

ΛΥΣΗ
Τυχαία μεταβλητή Χ=το χρώμα της μπάλας που τραβάω από το κουτί
Δειγματικός χώρος Ω={2Α, 1Α1Μ, 1Α1Κ, 2Μ, 1Μ1Κ, 2Κ}, σύνολο=6
Συνολο Ευνοϊκών Ενδεχομένων Ω'={1Α1Μ, 1Α1Κ, 1Μ1Κ }, σύνολο=3
Πιθανότητα να εξαχθούν δυο μπάλες διαφορετικού χρώματος=P(Ω')/P(Ω)=3/6=1/2

3: Έστω η εξίσωση $x^2+\kappa x+\lambda=0$. Τα κ και λ προκύπτουν ως ενδείξεις ενός ζαριού που ρίχνεται διαδοχικά δυο φορές. Να βρεθεί η πιθανότητα να είναι η διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης τετράγωνο ενός ακέραιου αριθμού.

ΛΥΣΗ
Υπενθυμίζουμε ότι η διακρίνουσα $D=\beta^2-4\alpha\gamma=\kappa^2-4*1*\lambda=\kappa^2-4\lambda$ και θέλω η D να είναι τετράγωνο ακεραίου.
Παίρνω όλα τα ενδεχόμενα:

κ= ΖΑΡΙ 1	**λ =ΖΑΡΙ 2**	**D**
1	1	-3
1	2	-7
1	3	-11
1	4	-15
1	5	-19
1	6	-23
2	1	0
2	2	-4
2	3	-8
2	4	-12
2	5	-16

2	6	-20
3	1	5
3	2	1
3	3	-3
3	4	-7
3	5	-11
3	6	-15
4	1	12
4	2	8
4	3	4
4	4	0
4	5	-4
4	6	-8
5	1	21
5	2	17
5	3	13
5	4	9
5	5	5
5	6	1
6	1	32
6	2	28
6	3	24
6	4	20
6	5	16
6	6	12

Σύνολο ενδεχομένων = 36
Ευνοϊκά ενδεχόμενα = 7
P (η διακρίνουσα να είναι τετράγωνο ακέραιου αριθμού) = 7/36

4: Ένα εργοστάσιο έχει δύο γραμμές παραγωγής, τις ΓΡ1 και ΓΡ2. Ο ποιοτικός έλεγχος κατατάσσει τα ελαττωματικά προϊόντα σε δυο κατηγορίες, την Ε1 και την Ε2, ανάλογα με την επισκευασιμότητα του ελαττώματος. Στον πίνακα που ακολουθεί καταγράφονται 1440 ελαττωματικά προϊόντα ως εξής:

	ΓΡ1	ΓΡ2	Σύνολο
Ε1	500	300	800
Ε2	400	240	640
Σύνολο	900	540	1440

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α= {το προϊόν προέρχεται από τη γραμμή παραγωγής ΓΡ1}

Β= {το προϊόν προέρχεται από τη γραμμή παραγωγής ΓΡ2}

Γ= {το προϊόν ανήκει στη κατηγόρια Ε1}

Δ= {το προϊόν ανήκει στη κατηγόρια Ε2}

Τα ενδεχόμενα Β και Δ είναι εξαρτώμενα ή ανεξάρτητα;

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$P(B) = \frac{540}{1440} = 0{,}375$$

$$P(\Delta) = \frac{640}{1440} = 0{,}444$$

και $P(B \cap \Delta) = \frac{240}{1440} = 0{,}167$

Αν $P(B \cap \Delta) = P(B) * P(\Delta)$ τότε τα Β και Δ είναι ανεξάρτητα. Αλλιώς είναι εξαρτημένα.

Από την άλλη μεριά,

$$P(B) * P(\Delta) = 0{,}375 * 0{,}444 = 0{,}167 = P(B \cap \Delta)$$

Άρα τα Β και Δ είναι ανεξάρτητα.

ΑΛΛΗ ΛΥΣΗ (ΜΕ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ)

Σύμφωνα με τον νόμο δεσμευμένων πιθανοτήτων είναι:

$$P(B|\Delta) = \frac{P(\Delta \cap B)}{P(B)} = \frac{240/1440}{540/1440} = \frac{240}{540} = 0{,}444 = P(\Delta)$$

και

$$P(\Delta|B) = \frac{P(\Delta \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{240}{1440}}{\frac{540}{1440}} = \frac{240}{540} = 0{,}444 = P(\Delta)$$

5: Επίλεγουμε μια τρίτεκνη οικογένεια. Ποια η πιθανότητα να έχει ακριβώς ένα αγόρι;

ΛΥΣΗ

Το ενδεχόμενο Α={η οικογένεια έχει ακριβώς ένα αγόρι} μας βοηθά να κατασκευάσουμε το δειγματικό χώρο των ενδεχομένων

$$\Omega = \{\kappa\kappa\kappa, \alpha\kappa\kappa, \alpha\alpha\kappa, \kappa\alpha\kappa, \kappa\kappa\alpha, \alpha\kappa\alpha, \kappa\alpha\alpha, \alpha\alpha\alpha\}, \sigma\upsilon\nu o\lambda o\ 8$$

Τα ευνοϊκά ενδεχόμενα είναι

$\Omega' = \{ακκ, κακ, κκα\}, συνολο\ 3$

άρα

$P(A) = \frac{3}{8}$

6: Η απόδοση της μετοχής της εταιρίας Α μπορεί να είναι είτε 20%, είτε 1% ή -20% ανάλογα με την πορεία την οικονομίας το επόμενο έτος. Η απόδοση της μετοχής της εταιρείας Β μπορει να είναι, αντίστοιχα, 5%, 1% ή -5%. Η πιθανότητα για την οικονομία είναι 12% να βρεθεί σε κατάσταση ανάπτυξης, 80% να είναι σε στασιμότητα και 8% σε κατάσταση ύφεσης. Σε ποια μετοχή θα επενδύατε;

ΛΥΣΗ

Τυχ.Μετ. Α={πορεία της μετοχής της εταιρείας Α}

Τυχ.Μετ. Β={πορεία της μετοχής της εταιρείας Β}

Τυχ.Μετ. Γ={πορεία της οικονομίας}

Παρατηρούμε ότι τα Α και Β είναι ανεξάρτητα, τα Α & Γ και τα Β & Γ σχετίζονται με από-κοινού-πιθανότητα (άρα έχω πολλαπλασιασμό πιθανοτήτων).

Μετατροπές: 20%=0,2 , 80%=0,8 , 1%=0,01 , 5%=0,05 , 8% =0,08 , 12% = 0,12

Η <u>αναμενόμενη απόδοση</u> της μετοχής Α είναι

$P(A) = 0{,}2 * 0{,}12 + 0{,}01 * 0{,}8 + (-0{,}2) * 0{,}08 = \ 0{,}016 \ = 1{,}6\%$

και η <u>αναμενόμενη απόδοση</u> της Β είναι

$P(B) = 0{,}05 * 0{,}12 + 0{,}01 * 0{,}8 + (-0{,}05) * 0{,}08 = \ 0{,}01 = 1\%$

Άρα, θα επενδύσω στην Α λόγω υψηλότερης αναμενόμενης απόδοσης.

7: Οι υποψήφιοι για εγγραφή σε ένα ΜΠΣ ενός πανεπιστημίου δίνουν εξετάσεις σε 5 μαθήματα και κάθε διαγώνισμα βαθμολογείται με άριστα το 100. Για την εισαγωγή λαμβάνεται υπόψιν το άθροισμα των βαθμών στα 5 διαγωνίσματα. Οι εξετάσεις έχουν φτιαχτεί έτσι ώστε το άθροισμα των βαθμών να ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(300,60^2)$. Το πανεπιστήμιο δέχεται το 15% των καλύτερων βαθμών. Πόσο πρέπει να γράψει ο τελευταίος για να γίνει δεκτός;

ΛΥΣΗ

Έχουμε $N(300,60^2)$ και ζητάμε την τιμή λ της τυχαίας μεταβλητής x, για την οποία $P(x \geq \lambda)=0,15$

είναι

$P(x \geq \lambda) = 0,15 \Leftrightarrow$

$P\left(\frac{x-300}{60} \geq \frac{\lambda-300}{60}\right) = 0,15 \Leftrightarrow$ $Z=(X-\mu)/\sigma \Rightarrow X \sim N(\mu,\sigma^2) \rightarrow Z \sim N(0,1)$

$P\left(Z \geq \frac{\lambda-300}{60}\right) = 0,15 \Leftrightarrow$ $P(Z \geq a)+P(Z<a)=1 \Leftrightarrow P(Z \geq a)=1-p(Z<a)$

$1 - P\left(Z < \frac{\lambda-300}{60}\right) = 0,15 \Leftrightarrow$

$P\left(Z < \frac{\lambda-300}{60}\right) = 0,85 \Leftrightarrow$ $P(Z<a)=\Phi(\alpha)$

$\left(\frac{\lambda-300}{60}\right) = 0,85$

Από πίνακες βρίσκουμε ότι $\Phi(1,03) = 0,8485$ και $\Phi(1,04) = 0,8508$

Άρα επιλέγω $Z = \frac{1,03+1,04}{2} = 1,035$ (κάνω παρεμβολή δυο σημείων)

Οπότε είναι

$\frac{\lambda-300}{60} = 1.035 \Leftrightarrow$

$\lambda = 60 * 1.035 + 60 \Leftrightarrow$

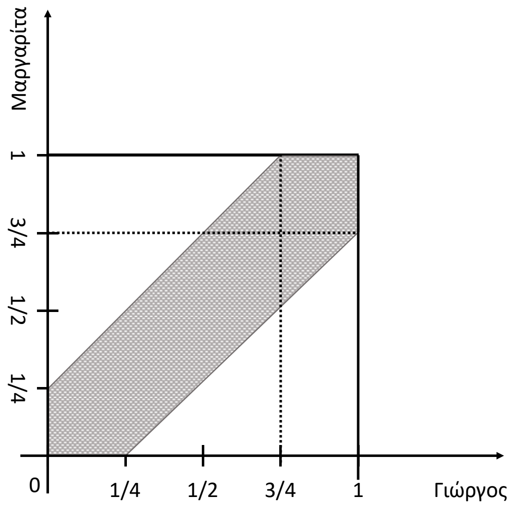
$\lambda = 362,1$

Άρα ο τελευταίος που θα γίνει δεκτός θα έχει άθροισμα βαθμών στα 5 διαγωνίσματα τουλάχιστον 362,1

8: Ο Γιώργος και η Μαργαρίτα έχουν ραντεβού κάποια συγκεκριμένη ώρα. Ο καθένας τους θα φτάσει εκεί σε ένα διάστημα που κυμαίνεται από 0 λεπτά καθυστέρησης μέχρι μία ώρα καθυστέρηση, με όλα τα ζεύγη καθυστέρησης (ανά λεπτό) να είναι ισοπίθανα. Ο πρώτος που θα φτάσει, θα περιμένει 15 λεπτά και θα φύγει αν ο άλλος δεν έχει φτάσει ακόμα. Ποια είναι η πιθανότητα να συνατηθούν;

ΛΥΣΗ

Θα χρησιμποιήσουμε ως δειγματικό χώρο το τετράγωνο, του οποίου τα σημεία είναι τα πιθανά ζεύγη καθυστέρησης. Επειδή είναι ισοπίθανα τα ζεύγη αυτά, η πιθανότητα κάθε υποσυνόλου ισούται με το εμβαδόν του. (Επειδή η τιμή είναι διακριτή, το εμβαδόν δεν είναι ακριβώς εμβαδόν, αλλά σύνολο σημείων, πλην όμως η προσέγγιση είναι ικονοποιητική).



Με βάση τα παραπάνω, η σκούρα περιοχή είναι το γεγονός A={ο Γ. και η Μ. θα φτάσουν στο ραντεβού 15 λεπτά ο ένας από τον άλλον). Το γεγονός αυτό περιστάνεται μαθηματικώς από την έκφραση:

$$A = \{(x, y) : \ |x - y| < \frac{1}{4}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

Οπότε P(A)=εμβαδόν σκούρας περιοχής=εμβαδόν τετράγωνου-2*εμβαδόν τετραγώνου=

$$1 * 1 - 2 * \left(\frac{3}{4} * \frac{3}{4}\right) * 0.5 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$