ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

ΤΙΤΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ**

ΕΝΟΤΗΤΑ: **3. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΔΕ**

ΟΝΟΜΑ ΚΑΘΗΓΗΤΗ: **ΦΡ. ΚΟΥΤΕΛΙΕΡΗΣ**

ΤΜΗΜΑ**: Τμήμα Διαχείρισης Περιβάλλοντος και Φυσικών Πόρων**

ΑΓΡΙΝΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Φραγκίσκος Κουτελιέρης

Αναπληρωτής Καθηγητής Παν/μίου Πατρών

Επικοινωνία: fcoutelieris@upatras.gr

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΔΕ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Γραμμική διαφορική εξίσωση *n* τάξης, ονομάζεται κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής

$$f_n(x)\,y^{(n)}(x)+f_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x)+\dots$$
$$\dots+f_1(x)\,y'(x)+f_0(x)\,y(x)=\sigma(x)$$

όπου οι συναρτήσεις $f_o(x)$, $f_1(x)$, …, $f_n(x)$, $\sigma(x)$ είναι <u>συνεχείς</u>.

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΔΕ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$y^{(n)}(x)+g_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x)+\ldots+g_1(x)\,y'(x)+$$
$$+g_0(x)\,y(x)=h(x)$$

=0

ΟΜΟΓΕΝΗΣ

≠0

ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΔΕ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Αν οι συντελεστές είναι **σταθεροί αριθμοί**, η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$y^{(n)}(x)+\alpha_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\ldots+\alpha_1 y'(x)+\alpha_0 y(x)=h(x)$$

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ

$$y^{(n)}(x)+\alpha_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\ldots+\alpha_1 y'(x)+\alpha_0 y(x)=h(x)$$

Παίρνω την αντίστοιχη ομογενή

$$y^{(n)}(x)+\alpha_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\ldots+\alpha_1 y'(x)+\alpha_0 y(x)=0$$

και κατασκευάζω τη **χαρακτηριστική εξίσωση**

$$\rho^n+\alpha_{n-1}\rho^{n-1}+\ldots+\alpha_2\rho^2+\alpha_1\rho+\alpha_0=0$$

την οποίαν λύνω.

ΛΥΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1

Αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι

$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu \in R$

και είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$\boxed{y_{o\mu}(x) = c_1 e^{\rho_1 x} + c_2 e^{\rho_2 x} + \ldots + c_n e^{\rho_n x}}$$

με $c_i \in R, i = 1, 2, \ldots, n$

ΛΥΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

Αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\lambda \in R$$

με πολλαπλότητα $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_\lambda$ αντίστοιχα, τότε η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$\boxed{y_{o\mu}(x) = e^{\rho_1 x} P_1(x) + e^{\rho_2 x} P_2(x) + \ldots + e^{\rho_\lambda x} P_\lambda(x)}$$

όπου τα πολυώνυμα $P_i(x)$ με $i = 1,2,\ldots,\lambda$ είναι βαθμών κ_1-1, κ_2-1, …, $\kappa_\lambda-1$, αντίστοιχα.

ΛΥΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3

Αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει και μιγαδική ρίζα της μορφής *α+βi* με πολλαπλότητα *κ*, τότε θα έχει και τον συζυγή του, οπότε ο αντίστοιχος όρος της λύσης θα είναι

$$\boxed{e^{\alpha x}\left[\Pi(x)\cos(\beta x)+P(x)\sin(\beta x)\right]}$$

όπου Π(x) και P(x) είναι πολυώνυμα βαθμού *κ-1*

ΛΥΣΕΙΣ της h(x)

<table>
<tr><th>Μορφή συνάρτησης $h(x)$</th><th>Ρίζες χαρακτηριστικής εξίσωσης</th><th>Μορφή ιδιάζουσας λύσης</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$P_\mu(x)$,

πολυώνυμο βαθμού μ</td><td>Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης</td><td>$\Pi_\mu(x)$, πολυώνυμο βαθμού μ</td></tr>
<tr><td>Ο αριθμός 0 είναι μια ρίζα της εξίσωσης με πολλαπλότητα s</td><td>$x^s\Pi_\mu(x)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$P_\mu(x)e^{\rho x}$</td><td>Ο αριθμός ρ δεν είναι ρίζα της εξίσωσης</td><td>$\Pi_\mu(x)\cdot e^{\rho x}$</td></tr>
<tr><td>Ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης με πολλαπλότητα s</td><td>$x^s\Pi_\mu(x)e^{\rho x}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$P_\nu(x)\cos(\beta x)+$,
$+Q_\mu(x)\sin(\beta x)$

όπου $P_\nu(x), Q_\mu(x)$, πολυώνυμα βαθμών ν και μ αντίστοιχα</td><td>Οι αριθμοί $\pm\beta i$ δεν είναι ρίζες της εξίσωσης</td><td>$\Pi_\kappa(x)\cos(\beta x)+$,
$+\mathrm{A}_\kappa(x)\sin(\beta x)$

όπου $\kappa=\max\{\nu,\mu\}$</td></tr>
<tr><td>Οι αριθμοί $\pm\beta i$ είναι ρίζες της εξίσωσης με πολλαπλότητα s</td><td>$x^s\left[\Pi_\kappa(x)\cos(\beta x)+\right.$
$\left.+\mathrm{A}_\kappa(x)\sin(\beta x)\right]$,

όπου $\kappa=\max\{\nu,\mu\}$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$e^{\alpha x}\left[P_\nu(x)\cos(\beta x)+\right.$
$\left.+Q_\mu(x)\sin(\beta x)\right]$

όπου $P_\nu(x), Q_\mu(x)$, πολυώνυμα βαθμών ν και μ αντίστοιχα</td><td>Οι αριθμοί $\alpha\pm\beta i$ δεν είναι ρίζες της εξίσωσης.</td><td>$e^{\alpha x}\left[\Pi_\kappa(x)\cos(\beta x)+\right.$
$\left.+\mathrm{A}_\kappa(x)\sin(\beta x)\right]$

όπου $\kappa=\max\{\nu,\mu\}$</td></tr>
<tr><td>Οι αριθμοί $\alpha\pm\beta i$ είναι ρίζες της εξίσωσης με πολλαπλότητα s.</td><td>$x^s\left[\Pi_\kappa(x)\cos(\beta x)+\right.$
$\left.+\mathrm{A}_\kappa(x)\sin(\beta x)\right]e^{\alpha x}$

όπου $\kappa=\max\{\nu,\mu\}$</td></tr>
</table>

Ασκήσεις

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την **1η** έκδοση.

Σημείωμα Αναφοράς

Φραγκίσκος Κουτελιέρης. «ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ». Έκδοση: 1.0. Αγρίνιο 2015.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/courses/ENV123/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνα 1: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a0/Kugleramme.jpg

«Το υλικό της παρουσίασης προέρχεται από τις πανεπιστημιακές παραδόσεις του καθηγητή Φρ. Κουτελιέρη».